目　录

一、“五家共井” ……………………………………………(1)

二、二元一次不定方程的正整数解 ……………………(5)

三、辗转相除法和连分数 ………………………………(10)

四、二元一次不定方程的连分数解法 …………………(20)

五、一次不定方程组 ……………………………………(30)

六、中国古代一些一次不定方程问题的解 ……………(38)

七、多元一次不定方程 …………………………………(43)

八、一次不定方程在线性规划中的应用 ………………(62)

九、“无零勾股” ………………………………………(70)

十、奇偶分析法与约倍数分析法 ………………………(80)

十一、循环连分数 ………………………………………(92)

十二、关于$x^2-Ay^2=1$的正整数解 ……………………(110)

十三、关于$x^2-Ay^2=1$的整数解 ………………………(120)

十四、关于$x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$的整数解 ……………(128)

十五、关于$x^2-Ay^2=C$的整数解 ………………………(139)

十六、一般二元二次不定方程 …………………………(149)

十七、费马猜测 …………………………………………(164)

练习解答 …………………………………………………(169)

一、"五家共井"

大家在上初中的时候就学习过代数方程，例如一元一次方程，一元二次方程，二元一次方程组等等，这些方程和方程组一般都是未知数的个数与方程式的个数相等。然而，还有一类方程，这类方程的个数少于未知数的个数，解这类方程往往就比较困难，因为有时有无穷多组解。我们把这一类的方程叫做不定方程。

例如方程 $2x+3y=5$ 有二个未知数，却只有一个方程。在实数范围内，对于变化着的每一个 x 值，可以由关系式：$y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ 获得对应的 y 值。这样得出的每一实数对 (x, y) 都是方程的解，因而有无穷组解。

但若把不定方程的解限制在整数或正整数范围内，这样方程的解就具有相对的稳定性。如上面这个不定方程的正整数解就只有 $x=1$，$y=1$ 一组。

一般我们把不定方程的解定义在整数或正整数范围内，下面就此范围介绍一些不定方程的解法。

不定方程已有很悠久的历史，在我国最早的几部数学著作《算经十书》中就有叙述。如《九章算术》中就有这样的题目，现在流传下来的《九章算术》是公元263年刘徽编辑

的，其中“五家共井”一题是我国最古老的不定方程问题之一。题意是这样的：

有五家合用一口井，汲取井水的绳子各家不一样长。井很深，甲家绳子长度的二倍还差一截，差的一截正好等于乙家的绳长。但乙家的绳子放到井里去差得更多，乙家绳长的三倍还差一截，这一截正好等于丙家的绳长。丙家的绳子更短，绳长的四倍还差一截，这一截恰等于丁家的绳长。丁家绳长的五倍还差一截，这一截恰巧等于戊家的绳长。戊家的绳最短，放到井里去，绳长的六倍还差一截，这一截正巧等于甲家的绳长，问井深多少？又各家的绳子长是多少？

这里有六个未知数，却只有五个方程可列。

此外在《算经十书》中的《孙子算经》和《张丘建算经》里也有这类问题的记载，并对解答的方法作了研究，如《孙子算经》卷下所载的“求一术”。《孙子算经》著作年代已无从考查，大约是第三世纪。所载问题是：

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

根据这个题目，如果设物的数目为N，则列出的方程有三个：

$$\begin{cases} N=3a+2 \\ N=5b+3 \quad (N,a,b,c\text{都是正整数}) \\ N=7c+2 \end{cases}$$

四个未知数N，a，b，c，却只有三个方程，是为不定方程。

《孙子算经》上所载的解法是："三三数之剩二，置一百四十。五五数之剩三，置六十三。七七数之剩二，置三十。并之得二百三十三，以二百十减之即得。"答案是"有物二十三"

《孙子算经》的这种算法曾被编成诗歌在民间广泛流传，诗歌是：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，除百零五便得知。

宋朝时，数学家秦九韶在《孙子算经》的基础上，发明了解这类问题的"大衍求一术"。"孙子算法"和"大衍求一术"不但在我国古代是很有名的，而且流传国外，在世界数学史上有相当的位置，被称为"中国剩余定理"。

我国古代解不定方程问题，除了"大衍求一术"外，还有"百鸡术"。《张丘建算经》卷末有一题：

公鸡一只值钱五。母鸡一只值钱三。小鸡三只值钱一。今有一百钱，买鸡一百只。问公鸡，母鸡，小鸡各买几只？

算经上的解法是从"母鸡每减少七只，就要增加公鸡四只和小鸡三只"出发的。答案很完整，有三组，其一为"公鸡四只，母鸡十八只，小鸡七十八只。"其二为"公鸡八只，母鸡十一只，小鸡八十一只。"其三为"公鸡十二只，母鸡四只，小鸡八十四只。"这是一个凑合相当的算法，称为"百鸡术"。

其后，有许多人对此进行了探讨，并编了不少新题目。清朝时，有个嘉庆皇帝编了一道百牛题：

有银百两，买牛百头。大牛每头十两，小牛每头五两，牛犊子每头半两。问买的一百头牛中大牛、小牛、牛犊子各有几头？

他把这道题交给旁边的一个大臣去做，大臣做来做去做不出，就带回家去，结果被他的儿子解了出来。用的也是凑合相当的办法。

你能知道答案么？那末，这类不定方程问题究竟怎样解才好呢？

二、二元一次不定方程的正整数解

二元一次不定方程可以写成 $Ax \pm By = C$ 的形式（A，B 是正整数，C是整数）。当 x，y 二项的系数A，B不是互质，而是有大于 1 的公约数K时，若C没有约数K，那末不定方程 $Ax \pm By = C$ 就没有整数解。

证明：如果方程 $Ax \pm By = C$ 有整数解，将方程二边除以K，方程左边必定是整数，而方程右边就成为分数了，这显然是矛盾的。

所以，此时不定方程 $Ax \pm By = C$ 无整数解，也就是不定方程 $Ax \pm By = C$ 只有当C也有约数K时才有整数解。

若C也有公约数 K，我们通过将方程各项除以最大公约数的办法，总可以得到一个 x，y 项的系数不再有大于 1 的公约数的不定方程。

因此，我们将二元一次不定方程归结为 $ax \pm by = c$ 的形式。（这里a，b是互质的正整数，c是整数）

为了说明二元一次不定方程的解法，让我们先来看二道例题。

例 1　求不定方程$5x + 3y = 22$的正整数解。

解法是先用x，y系数中较小的一个 3 去除方程式的各项，并解出 y。得

$$y = \frac{22 - 5x}{3} \tag{1}$$

再把 x项的系数 $-\frac{5}{3}$和常数项$\frac{22}{3}$的整数部分和分数部分加以分离,成为$y = 7 + \frac{1}{3} - x - \frac{2}{3}x$ 即 $y = 7 - x + \frac{1-2x}{3}$

由于 x, y 都是整数，$7-x$ 也是整数，故$\frac{1-2x}{3}$也一定是整数。

设 $\frac{1-2x}{3} = K_1$ 则 $3K_1 + 2x = 1$ 即得又一不定方程。（K_1为整数）

仍按前法用 x, K_1 系数中较小的一个 2 去除方程式的各项，解出 x。得

$$x = \frac{1-3K_1}{2} \tag{2}$$

分离 K_1 系数 $-\frac{3}{2}$的整数部分和分数部分：

$$x = -K_1 + \frac{1-K_1}{2}$$

同上$\frac{1-K_1}{2}$必为整数。

设 $\frac{1-K_1}{2} = K_2$（K_2为整数） 得

$$1 - K_1 = 2K_2 \tag{3}$$

其中K_1的系数为 1，较K_2 的系数为小。到此就不必再按前法除下去了。

从(3)式解出 $K_1=1-2K_2$代入(2)式和(1)式，得

$$\begin{cases} x=3K_2-1 \\ y=9-5K_2 \end{cases} \quad (K_2\text{为整数}) \qquad (4)$$

这就是原不定方程整数解的通式。至于正整数解，我们这样来思考：由于$x>0$，$y>0$，也就是

$$\begin{cases} 3K_2-1>0 \\ 9-5K_2>0 \end{cases} \quad \text{解得}\ \frac{1}{3}<K_2<1\frac{4}{5}$$

而K_2为整数，因此只能取$K_2=1$，代入通式（4）即得原不定方程的唯一正整数解，为

$$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

例 2 求不定方程$5x-14y=11$的正整数解。

解：先用系数中较小的5除方程式各项，并解x。得

$$x=\frac{11+14y}{5} \qquad (1)$$

将y的系数$\frac{14}{5}$和常数项$\frac{11}{5}$的整数部分与分数部分分离成为

$$x=2+2y+\frac{1+4y}{5}$$

因为x，y，$(2+2y)$等都是整数，所以形式上的分数部分$\frac{1+4y}{5}$实质上也必定是整数。

设$\frac{1+4y}{5}=K_1$ 得又一不定方程$5K_1-4y=1$（K_1为整数）。

按前法处理：

$$y = \frac{5K_1 - 1}{4} = K_1 + \frac{K_1 - 1}{4} \qquad (2)$$

设$\frac{K_1 - 1}{4} = K_2$　则$K_1 = 4K_2 + 1$（K_2为整数）

代入（2）式和（1）式，即得整数解的通式。

$$\begin{cases} x = 14K_2 + 5 \\ y = 5K_2 + 1 \end{cases} \qquad (K_2\text{为整数})$$

这里K_2是一个整值参数，对于每一个确定的整数K_2，有(x, y)的一组整数对与之对应，从此再求正整数解。

由于$x > 0$，$y > 0$故K_2需满足不等式组：

$$\begin{cases} 14K_2 + 5 > 0 \\ 5K_2 + 1 > 0 \end{cases} \qquad \text{解得} K_2 > -\frac{1}{5}$$

取整数$K_2 = 0, 1, 2, 3\cdots$可得无穷组正整数解，其中最小正整数解(x, y)为$(5, 1)$。

把上面二个例子的解法归纳起来，可以得到解二元一次不定方程$ax \pm by = c$的有效方法。（a, b是互质正整数，c是整数）步骤如下：

（1）先用二未知数的系数a, b中较小的一个去除方程式的各项，解出相应系数较小的一个未知数。

（2）在解出的一未知数表达式中，将另一未知数的系数和常数项分离成整数部分和分数部分。实际上这个分数部分也是整数，设分数部分为K_1，得到又一个不定方程。

（3）继续按（1）（2）所叙的方法处理，并设逐次的分数部分为K_2，$K_3\cdots\cdots K_n$由于相应的不定方程中K的系数一次

比一次小，而原先的a，b互质，所以经过有限次变换，最后不定方程二个未知数中必有一个系数等于1，得到整式

$$K_{n-1}=dK_n+e\ (d,\ e\text{为整数})$$

式中n代表变换的次数。

（4）将$K_{n-1}=dK_n+e$按顺序倒代上去，解出K_{n-2}，$K_{n-3}\cdots K_2$，K_1，x，y，即得原不定方程整数解的通式。这种通式是原不定方程的一种参数方程。

（5）要求正整数解，可按$x>0$，$y>0$分析整数解通式中K_n的取值范围，从而得正整数解，并推知解的组数有限或无限。

下面四题读者可先自己试试看，然后再对一对书后的解答。

练　　习

（1）求$\frac{x}{3}-3y=1$的正整数解。

（2）求$x=102-9.8y$的正整数解。

（3）求$24x+15y=20$的整数解。

（4）求$5x-14y=-11$整数解的通式。

三、辗转相除法和连分数

前一节提到的二元一次不定方程的解法实际上是将二未知数的系数辗转相除。辗转相除法以及连分数与解不定方程有密切联系。现在我们讲一讲辗转相除法和连分数的概念。

对于二个正整数，先以小的一个数去除大数，后以第一次余数去除小数，再以第二次余数去除第一次余数……如此继续相除叫辗转相除。

设二个正整数a，b辗转相除（$a>b$）

用b除a，商为a_1，余数为K_1，则

$$a=a_1b+K_1 \qquad 0\leqslant K_1<b \qquad (1)$$

当$K_1=0$时，b为a的约数，即b是a和b的最大公约数。

当$K_1\neq 0$时，用K_1除b，商为a_2，余数为K_2，则

$$b=a_2K_1+K_2 \qquad 0\leqslant K_2<K_1 \qquad (2)$$

当$K_2=0$时，K_1是b的约数，由(1)式可知K_1也是a的约数。反过来从(1)式又可知a,b的任一公约数一定是b，K^1的公约数，这就是说K_1是a,b的最大公约数。

当$K_2\neq 0$时，再用K_2除K_1，商为a_3，余数为K_3，即

$$K_1=a_3\cdot K_2+K_3 \qquad 0\leqslant K_3<K_2 \qquad (3)$$

当$K_3=0$时，K_2是K_1的约数，由(1)(2)式可知K_2也是a,b的约数。反过来由(1)(2)式又可知a,b的任一公约数

一定是b，K_1的公约数，b,K_1的任一公约数一定是K_1,K_2的公约数，也就是说K_2是a,b的最大公约数。

当$K_3\neq 0$时，再用K_3除K_2。继续下去，经过n次辗转相除，得商$a_1,a_2,a_3\cdots\cdots a_n$，余数$K_1>K_2>K_3>\cdots\cdots>K_n$，由于余数$K$是逐次减小的非负整数，故经有限次(例如$n$次)辗转相除，最后余数$K_n=0$，即除尽。此时$K_{n-1}$为$a$，$b$的最大公约数，如$a$，$b$互质，则$K_{n-1}=1$。

以上所述就是辗转相除法，为运算方便可采用竖式：

$$\begin{array}{r|c|l} a & & \\ \underline{a_1\cdot b} & a_1 & b \\ K_1 & a_2 & \underline{a_2\cdot K_1} \\ \underline{a_3\cdot K_2} & a_3 & K_2 \\ K_3 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & K_{n-2} \\ K_{n-1} & a_n & \underline{a_n\cdot K_{n-1}} \\ & & K_n=0 \end{array}$$

上面所示的竖式为n是偶数的情况，若n为奇数，竖式的最后部分左右正好相反。竖式中间一列a_1，$a_2\cdots a_n$为商数。

利用辗转相除法很容易求出二个正整数a与b的最大公约数，同时还能将分数$\frac{a}{b}$表示成繁分数的形式。

由于$\frac{a}{b}=a_1+\frac{K_1}{b}$　　　　(见(1)式)

$\frac{b}{K_1}=a_2+\frac{K_2}{K_1}$　　　　(见(2)式)

$\frac{K_1}{K_2}=a_3+\frac{K_3}{K_2}$　　　　(见(3)式)

……

$$\frac{K_{n-2}}{K_{n-1}}=a_n+\frac{K_n}{K_{n-1}}\ (K_n=0)\text{即}\ \frac{K_{n-2}}{K_{n-1}}=a_n$$

所以 $\frac{a}{b}=a_1+\frac{K_1}{b}=a_1+\cfrac{1}{\frac{b}{K_1}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\frac{K_2}{K_1}}$

$$=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\frac{K_1}{K_2}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\frac{K_3}{K_2}}}$$

$$=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\frac{K_2}{K_3}}}}=\cdots\cdots$$

$$=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}$$

当$K_{n-1}\neq 1$时，右下角最后之a_n实际上已将最大公约数约去，所以此时繁分数所代表的是既约分数。

将繁分式简写成：$\frac{a}{b}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots+\frac{1}{a_n}$的形式叫做连分数。$n$ 为连分数的项数。

从上面可以知道有理数$\frac{a}{b}$化成连分数，其项数 n 有限，故也叫有限连分数。

我们按一次次辗转相除的顺序将连分数截段，得

a_1；

$a_1+\frac{1}{a_2}$；

$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}$；

…

$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_{n-1}}$；

$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_{n-1}}\frac{1}{+a_n}$

这些分数（第一个a_1看作$\frac{a_1}{1}$）的值逐渐靠近$\frac{a}{b}$，称为分数$\frac{a}{b}$的渐近分数，简称近数。a_1为第一近数；（$a_1+\frac{1}{a_2}$）为第二近数；（$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}$）为第三近数…（$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}$$\frac{1}{+\cdots+a_{n-1}}$）为第$(n-1)$个近数，最后的（$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$$\frac{1}{+a_{n-1}}\frac{1}{+a_n}$）等于$\frac{a}{b}$。于是第（$n-1$）个近数为$\frac{a}{b}$前面的一个近数，又称$\frac{a}{b}$的前一近数。（注意：如果$a<b$则$a_1=0$，此时第一近数规定为$\frac{0}{1}$.）

显然第一近数$a_1<\frac{a}{b}$，

由于$a_2 < \frac{b}{K_1}$即$\frac{1}{a_2} > \frac{K_1}{b}$，可推知$a_1 + \frac{1}{a_2} > a_1 + \frac{K_1}{b}$

$$= \frac{a}{b}$$

因此第二近数 $(a_1 + \frac{1}{a_2}) > \frac{a}{b}$。

依次类推，第三近数小于$\frac{a}{b}$，第四近数大于$\frac{a}{b}$……并且与$\frac{a}{b}$越来越近。

例 3　将$\frac{43055}{18644}$写成连分数的形式，并依次求出它的各个近数。

解：用辗转相除法

43055		
37288	2	18644
5767	3	17301
5372	4	1343
395	3	1185
316	2	158
79	2	158
		0

得　$\frac{43055}{18644} = 2 + \frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}$

第一近数为　$\frac{2}{1}$

第二近数为$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

第三近数为 $2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13}$

第四近数为 $2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}=\frac{97}{42}$

第五近数为 $2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2}=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{2}{7}$

$$=2+\frac{1}{3+}\frac{7}{30}=\frac{224}{97}$$

最后 $2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}=\frac{545}{236}$ 为 $\frac{43055}{18644}$ 约去最大公约数79后的既约分数。实际上近数都是既约分数。（见后面定理（2）推论）

例 4　化 $\frac{251}{802}$ 为连分数，并求出它的前一近数。

解：由辗转相除法

$$\begin{array}{r|c|r}
802 & & \\
753 & 3 & 251 \\
\hline
49 & 5 & 245 \\
48 & 8 & 6 \\
\hline
1 & 6 & 6 \\
 & & 0
\end{array}$$

$$\frac{251}{802}=0+\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{8+}\frac{1}{6}$$

得其前一近数为：

$$0+\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{8}=\frac{1}{3+}\frac{8}{41}=\frac{41}{131}$$

下面介绍二条关于连分数的定理。

定理一 在连分数 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n}$ 中，设 $\frac{p_m}{q_m}$ 为它的第m个近数，则有：

$$\begin{aligned}p_m&=a_mp_{m-1}+p_{m-2}\\q_m&=a_mq_{m-1}+q_{m-2}\end{aligned}\quad(n,m\text{为自然数 }3\leqslant m<n)$$

证明：用数学归纳法。

1°当$m=3$时，$\begin{aligned}p_1&=a_1\\q_1&=1\end{aligned}$，$\begin{aligned}p_2&=a_1\cdot a_2+1\\q_2&=a_2\end{aligned}$，

而$\frac{p_3}{q_3}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}=\frac{a_3\cdot a_2\cdot a_1+a_3+a_1}{a_3\cdot a_2+1}$

$$=\frac{a_3(a_2a_1+1)+a_1}{a_3a_2+1}=\frac{a_3p_2+p_1}{a_3q_2+q_1}$$

所以$\begin{aligned}p_3&=a_3p_2+p_1\\q_3&=a_3q_2+q_1\end{aligned}$成立。

2°设定理对于第$(m-1)$个近数是正确的。

$$\begin{aligned}p_{m-1}&=a_{m-1}p_{m-2}+q_{m-3}\\q_{m-1}&=a_{m-1}q_{m-2}+q_{m-3}\end{aligned}$$

那末，第m个近数为

$$\frac{p_m}{q_m}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_{m-1}+}\ \frac{1}{a_m}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{\left(a_{m-1}+\frac{1}{a_m}\right)}$$

将 $\left(a_{m-1}+\frac{1}{a_m}\right)$看作第$(m-1)$个商数，利用定理对于第$(m-1)$个近数是正确的这个假设前提可得：

$$\frac{p_m}{q_m}=\frac{\left(a_{m-1}+\frac{1}{a_m}\right)p_{m-2}+p_{m-3}}{\left(a_{m-1}+\frac{1}{a_m}\right)q_{m-2}+q_{m-3}}$$

$$=\frac{a_m(a_{m-1}p_{m-2}+p_{m-3})+p_{m-2}}{a_m(a_{m-1}q_{m-2}+q_{m-3})+q_{m-2}}$$

$$=\frac{a_m p_{m-1}+p_{m-2}}{a_m q_{m-1}+q_{m-2}}$$

于是 $\begin{matrix} p_m=a_m p_{m-1}+p_{m-2} \\ q_m=a_m q_{m-1}+q_{m-2} \end{matrix}$ 定理证毕。

这是一个递推定理，据此写出连分数的各个近数是很容易的。

如$\frac{251}{802}=0+\frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{8+}\ \frac{1}{6}$

其第一近数是$\frac{0}{1}$；第二近数是$\frac{1}{3}$，

第三近数是$\frac{5\times1+0}{5\times3+1}=\frac{5}{16}$；

第四近数（即$\frac{251}{802}$的前一近数）是$\frac{8\times5+1}{8\times16+3}=\frac{41}{131}$，

最后是$\frac{6\times41+5}{6\times131+16}=\frac{251}{802}$。

定理二 在连分数$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n}$中，设$\frac{p_m}{q_m}$为它的第$m$个近数，则有：$p_mq_{m-1}-p_{m-1}q_m=(-1)^m$（$n,m$为自然数，$2\leqslant m\leqslant n$）

证明：根据定理（1）我们有

$$\begin{aligned}p_mq_{m-1}-p_{m-1}q_m&=(a_mp_{m-1}+p_{m-2})q_{m-1}\\&\quad-p_{m-1}(a_mq_{m-1}+q_{m-2})\\&=a_mp_{m-1}q_{m-1}+p_{m-2}q_{m-1}\\&\quad-a_mp_{m-1}q_{m-1}-p_{m-1}q_{m-2}\\&=-(p_{m-1}q_{m-2}-p_{m-2}q_{m-1})\qquad(1)\end{aligned}$$

同理有：

$$p_{m-1}q_{m-2}-p_{m-2}q_{m-1}=-(p_{m-2}q_{m-3}-p_{m-3}q_{m-2})\qquad(2)$$

$$p_{m-2}q_{m-3}-p_{m-3}q_{m-2}=-(p_{m-3}q_{m-4}-p_{m-4}q_{m-3})\qquad(3)$$

……

$$p_3q_2-p_2q_3=-(p_2q_1-p_1q_2)\qquad(m-2)$$

而$p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)\times1-a_1a_2=1$

代入第（$m-2$）式，倒代上去，直至第（1）式。即得

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-2} = (-1)^m \text{证毕。}$$

从这个式子推论，若p_m与q_m有公约数，则此公约数必为($p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m$)的因数，即为$\pm 1$的约数。故$p_m$与$q_m$的公约数为1，也就是$p_m$与$q_m$互质。

练　　习

(5) 将$\frac{597}{1522}$化成连分数，并求出它的第五近数$\frac{p_5}{q_5}$。

(6) 求连分数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$的值，并求出它的前一近数。

(7) 将π（取3.14159）化成连分数，并依次求$\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$，$\frac{p_3}{q_3}$，$\frac{p_4}{q_4}$四个近数。

(8) 求连分数$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}$的前一近数。

(9) 若$\frac{a}{b}=\frac{5}{14}$，求出它的前一近数$\frac{p}{q}$，并验证$aq-bp=(-1)^n$

（n为连分数的项数）

四、二元一次不定方程的连分数解法

现在我们回到二元一次不定方程$ax \pm by = c$的求解上来。（a，b是互质的正整数，c是整数）

当已知它的一组整数解(x_0, y_0)时，可立即写出整数解的通式。

$$\begin{cases} x = \mp bK + x_0 \\ y = aK + y_0 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

这里“$\mp$”号与原不定方程的“$\pm$”号对应。

证明：将整数解(x_0, y_0)代入原方程，得

$$ax_0 \pm by_0 = c$$

再将原方程式与上式二边分别相减，得

$$a(x - x_0) \pm b(y - y_0) = 0$$

即 $$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\mp b}{a}$$

于是有 $$\begin{cases} x - x_0 = \mp bK \\ y - y_0 = aK \end{cases} \quad (K\text{为整值参数}).$$

因而 $$\begin{cases} x = \mp bK + x_0 \\ y = aK + y_0 \end{cases}$$

证毕。

从这个通式可知当K顺次取各整数时，对应的有序整数对（x，y）就是原不定方程的整数解。其中各x值成等差级数，公差为$\mp b$。各y值也成等差级数，公差为a。

所以二元一次不定方程若有整数解，则有无穷多组整数解。

例如$2x+3y=5$的一组整数解为（1，1）其他各组整数解则为…（7，－3），（4，－1），（1，1），（－2，3），（－5，5）…等。通式为：

$$\begin{cases} x=-3K+1 \\ y=2K+1 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

当二元一次不定方程x，y的系数比较简单，通过观察能得到它的一组整数解（x_0，y_0）时，用这个方法写它的其他各组整数解和整数解的通式特别简易。如果系数较大，比较复杂，不易求得它的一组整数解时，那末我们可以运用连分数来求解。

不定方程$ax\pm by=c$（a，b是互质正整数，c是整数）

将$\frac{a}{b}$化成连分数：$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n}$

设$\frac{a}{b}$的前一近数是$\frac{p}{q}$，按连分数定理二得

$$a\cdot q-b\cdot p=(-1)^n$$

即 $$(-1)^n aq-(-1)^n bp=1$$

二边乘以c，成为：

$$(-1)^n acq-(-1)^n bcp=c$$

与原不定方程$ax\pm by=c$比较，立即可得一组整数解：

$$\begin{cases} x = (-1)^n cq \\ y = \mp(-1)^n cp \end{cases}$$

并可得整数解的通式为:

$$\begin{cases} x = \mp bK + (-1)^n cq \\ y = aK \mp (-1)^n cp \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

上面二式里“∓”号均与原不定方程的“±”号对应。

至于正整数解，参数K需满足不等式组。

$$\begin{cases} \mp bK + (-1)^n cq > 0 \\ aK \mp (-1)^n cp > 0 \end{cases}$$

分二种情况讨论。

1°对于$ax+by=c$

显然$c \leqslant 0$时无正整数解，$c>0$且必须充分大才有正整数解。（如：$2x+3y=4$无正整数解）

若有正整数解，则从上面的不等式组可得

$$\frac{(-1)^n cp}{a} < K < \frac{(-1)^n cq}{b}$$

如果用记号$[N]$来表示不大于N的最大整数。如:

$[0.314]=0$，$[-1.7]=-2$，$[5]=5$，$[\sqrt{2}]=1$等，那末K的值成为

$$\left[\frac{(-1)^n cp}{a}\right] < K \leqslant \left[\frac{(-1)^n cq}{b}\right]$$

等号仅当$\frac{(-1)^n cq}{b}$不是整数时与小于号同成立。

所以不定方程$ax+by=c$若有正整数解，则解的组数有

限。

2°对于$ax-by=c$

从前面关于K的不等式组得

$$\begin{cases} K>\dfrac{-(-1)^n cq}{b} \\ K>\dfrac{-(-1)^n cp}{a} \end{cases}$$

所以不定方程$ax-by=c$有无穷多组正整数解。

例 5 已知$7x-5y=17$的一组整数解为(1，-2)，求其整数解的通式。

解一，按前面叙述的已知一组整数解的公式写通式。

$$\begin{cases} x=5K_1+1 \\ y=7K_1-2 \end{cases} \quad (K_1\text{为整数})$$

解二，用连分数法

$$\frac{7}{5}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2}，n=3，\text{前一近数}\frac{p}{q}=\frac{3}{2}。$$

按公式写出整数解的通式为：

$$\begin{cases} x=5K_2+(-1)^3\times 17\times 2=5K_2-34 \\ y=7K_2+(-1)^3\times 17\times 3=7K_2-51 \end{cases} \quad (K_2\text{为整数})$$

表面一看，此通式似与解一不同，其实一样。取

$$K_2=K_1+7\text{代入则}\begin{cases} 5K_2-34=5K_1+1 \\ 7K_2-51=7K_1-2 \end{cases}$$

例 6 求$437x+1050y=6209$的正整数解。

解：$\dfrac{437}{1050}=0+\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{14+}\dfrac{1}{6}$，$n=6$，

$$\frac{p}{q}=\frac{72}{173},$$

整数解的通式为：

$$\begin{cases} x=-1050K+6209\times 173 \\ y=437K-6209\times 72 \end{cases}\quad (K\text{为整数})$$

其正整数解K需满足：

$$\begin{cases} -1050K+6209\times 173>0 \\ 437K-6209\times 72>0 \end{cases}$$

即　　$1022<K\leqslant 1023$

因此$K=1023$

代入通式得唯一正整数解（7，3）

例 7　求$10x-51y=0$的最小正整数解。

解：这是一个特例，即$ax\pm by=c$　中$c=0$。

整数解的通式比较简单。为

$$\begin{cases} x=\mp bK \\ y=aK \end{cases}\quad (K\text{为整数})$$

本题取$K=1$可得最小正整数解（51，10）

例 8　不定方程$3x+5y=1306$有多少组正整数解？

解：由于$\frac{3}{5}=0+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$，$n=4$，$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$。

整数解的通式为

$$\begin{cases} x=2612-5K \\ y=3K-1306 \end{cases}\quad (K\text{为整数})$$

但正整数解K需满足：

$$\begin{cases} 2612 - 5K > 0 \\ 3K - 1306 > 0 \end{cases}$$

解得$435 < K \leqslant 522$

$$522 - 435 = 87$$

所以原不定方程有87组正整数解。

例 9　一个二位数，各位数字和的3倍与原数相加等于它的二位数字互换位置所得到的数。求所有这样的正整数。

解：设这个二位数为 $\overline{xy}$ 。即十位数字为 x，个位数字为 y。

按题意列出方程：

$$3(x+y)+(10x+y)=10y+x$$

化简，$2x-y=0$

$$\begin{cases} x = K \\ y = 2K \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

由于$0 < x \leqslant 9$，$0 \leqslant y \leqslant 9$，故取$K=1$，2，3，4

得四组解：（1，2），（2，4），（3，6），（4，8）。

12，24，36，48就是所要求的二位数。

例10　多位数$62ab427$是99的倍数，求a和b。

（上海市1957年数学竞赛题）

解：设其中的二位数$\overline{ab}$为 x。按题意得

$$62\times10^5+427+x\times10^3=99y\ （x，y\text{都是正整数}）$$

即不定方程$99y-10^3x=62\times10^5+427$

解之，$\dfrac{99}{1000}=0+\dfrac{1}{10+}\dfrac{1}{9+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{9}$，$n=5$，$\dfrac{p}{q}=\dfrac{10}{101}$.

$$\begin{cases} y = 10^3K - 6200427 \times 101 \\ x = 99K - 6200427 \times 10 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

因为x是二位数。$10 \leqslant x \leqslant 99$

即　　$10 \leqslant 99K - 62004270 \leqslant 99$

得　　$626305\frac{85}{99} \leqslant K \leqslant 626306\frac{75}{99}$

只能取$K = 626306$，代入前面的通式

$$x = 62004294 - 62004270 = 24$$

所以原数中$a = 2$，$b = 4$原数为6224427。

本题也可按 9 的倍数和11的倍数的性质来分析解决。

例11　分数$\frac{3}{35}$是否可以化成以 5 及 7 为分母的二个真分数的差。

解：设$\frac{3}{35} = \frac{x}{5} - \frac{y}{7}$。

去分母，得不定方程$7x - 5y = 3$

解之。$\frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$，$n = 3$，$\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} x = 5K - 6 \\ y = 7K - 9 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

因为 $\begin{matrix} 0 < x < 5 \\ 0 < y < 7 \end{matrix}$　　即 $\begin{cases} 0 < 5K - 6 < 5 \\ 0 < 7K - 9 < 7 \end{cases}$

K只能取2，得唯一解（4，5）。

所以$\frac{3}{35}$能化成二个真分数$\frac{4}{5}$与$\frac{5}{7}$的差。

例12 用载重4吨的大卡车和载重2.5吨的小货车运送货物。现有货物总重量为18吨，要一次运完，且每辆汽车都要装足，那末大卡车和小货车各要几辆？

解：设4吨的大卡车要x辆，2.5吨的小货车要y辆。

$$4x+2.5y=18$$

去掉小数成$8x+5y=36$

得唯一正整数解（2，4）。即需大卡车2辆，小货车4辆。

例13 有一个爱好数学的人，他发现自己到1981年时的年龄正好等于他出生那一年各位数字的和。你能算出他现在是几岁吗？

解：一般年龄总在100岁以内。假如此人出生在二十世纪，设生的那一年为$\overline{19xy}$，到1981年此人的年龄为

$$1981-\overline{19xy} \quad 即81-(10x+y)$$

这个数字正巧等于$\overline{19xy}$各位数字的和，得

$$81-(10x+y)=1+9+x+y$$

化简成：$11x+2y=71$

用连分数法解得

$$\begin{cases} x=-2K+71 \\ y=11K-355 \end{cases}$$

由于x，y都是0至9的正整数。即K需满足，

$$\begin{cases} 0\leqslant -2K+71\leqslant 9 \\ 0\leqslant 11K-355\leqslant 9 \end{cases}$$

所以只能取$K=33$，得唯一解（5，8）。

此人是1958年生，现年为$1979-1958=21$（岁）

假如此人是十九世纪生，那么生年各位数字之和不会大于27，而到1981年此人年龄不会小于81岁，因此1981年时的年龄不会等于生的那一年各位数字之和。也就是这个人不可能生于十九世纪。

练　　习

(10)求$127x-52y+1=0$的整数解。

(11)求方程$-8x+5y=200$的小于100的正整数解。

(12)求$23\times2^x+17\times3^y=2113$的正整数解。

(13)不定方程$2x+4y=272$有多少组正整数解。

(14)有一个二位数，它的各位数字和的5倍加上原数等于它的二位数字互换位置后所得到的数，求这个二位数。

(15)一个二位数，加上54以后，十位数字和个位数字正好互换位置，求这个二位数。

(16)三位数只有中间一位是“0”。当它的3倍被7除时，余数为6，求这种三位数。

(17)试将分数$\frac{41}{35}$化成以5及7作分母的二个真分数之和。

(18)求所有被4除余1的二位数的和。

（辽宁省1978年数学竞赛题）

(19)甲种书每本价7角，乙种书每本价5角，二种书各买若干本，总共价格7元3角，甲、乙二种书各买了多少

本？

(20)全班级44人都到公园里去划船，大船每只可坐8人，小船每只可坐5人，每只船都坐足，需大船，小船各几只？

(21)某自动车间，对生产的零件采用电子自动计数。其生产能力为全部生产甲种零件，每天可生产1554只；若全部生产乙种零件，每天可生产1887只。现在先生产甲种零件若干天，然后生产乙种零件。经过一个短时期统计一下，甲、乙二种零件共生产了25974只，问甲、乙二种零件各生产了多少天？

(22)一辆卡车在公路上匀速行驶，起初看到里程牌上的数字为$\overline{AB}$，过了1小时里程牌上的数字为$\overline{BA}$，又行驶了1小时里程牌上的数字为$\overline{A0B}$，求每次看到的数字和卡车速度。

五、一次不定方程组

在掌握了二元一次不定方程求解方法的基础上，我们来研究一次不定方程组。如三元一次不定方程组可以归结为下面的形式，其中a_1，b_1，c_1，d_1，a_2，b_2，c_2，d_2都是整数。

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & (2) \end{cases}$$

要求它的整数解，可以先用消元法从二个方程中消去一个未知数。若消去z，将(1)式乘以c_2，将(2)式乘以c_1，然后相减得

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1$$

为二元一次不定方程。若有整数解，按前面的方法可得通解式。设为

$$\begin{cases} x=f_1(K_1) & (3) \\ y=f_2(K_1) & (4) \end{cases} \quad (K_1\text{为整数})$$

这里f_1和f_2为K_1的一次整式。以此代入原方程组中的一个方程，即得又一个二元一次不定方程。设为

$$Az+BK_1=C \ (A，B，C\text{为整数})$$

仍按前法求解，得z和K_1整数解的通式。设为

$$\begin{cases} z=f_3(K_2) & (5) \\ & (K_2\text{为整数}) \\ K_1=f_4(K_2) & (6) \end{cases}$$

f_3，f_4为K_2的一次整式。将(6)式代入(3)式和(4)式，便得原三元一次不定方程组整数解的通式：

$$\begin{cases} x=f_1[f_4(K_2)] \\ y=f_2[f_4(K_2)] \quad (K_2\text{为整数}) \\ z=f_3(K_2) \end{cases}$$

和二元一次不定方程相同，三元一次不定方程组若有整数解，则有无穷多组。且x的值，y的值，z的值各自成等差级数。

至于正整数解，K_2需满足不等式组：

$$\begin{cases} f_1[f_4(K_2)]>0 \\ f_2[f_4(K_2)]>0 \\ f_3(K_2)>0 \end{cases}$$

例14　求不定方程组

$$\begin{cases} 5x+7y+2z=24 & (1) \\ 3x-y-4z=4 & (2) \end{cases}$$

的整数解的通式和它的正整数解。

解：先消去z，将(1)式乘以2与(2)式相加得

$$13x+13y=52$$

即　　$x+y=4$

通解　$\begin{cases} x=K \\ y=4-K \end{cases}$　(K是整数)

代入（1）式：$5K+7(4-K)+2z=24$

得　$z=K-2$

总之，原不定方程组整数解的通式为

$$\begin{cases} x=K \\ y=4-K \quad (K\text{为整数}) \\ z=K-2 \end{cases}$$

其正整数解需满足不等式组：

$$\begin{cases} K>0 \\ 4-K>0 \\ K-2>0 \end{cases}$$

得 $2<K<4$ 以$K=3$ 代入上面的通式得唯一的正整数解为：$x=3$，$y=1$，$z=1$

例15 某自然数与13的和是5的倍数，并且与13的差是6的倍数，求这种自然数中最小的三个。

解：设具有这种性质的自然数为x

$$\begin{cases} x+13=5y & (1) \\ x-13=6z & (2) \end{cases} \quad (y,\ z\text{也是自然数})$$

（1）式减去（2）式得$5y-6z=26$

通解为 $\begin{cases} y=6K-26 \\ z=5K-26 \end{cases}$ （K为整数）

代入（1）式得$x=30K-143$。

要使x，y，z都是自然数，只要$K\geqslant 6$就行了，故最小的三个这样的自然数为37，67，97。

例16 有甲，乙，丙三种灯泡，每只单价各为5角，7

角，9角。有人买甲，乙，丙三种灯泡各若干只，共花费5元2角。如果每种灯泡单价各降低2角，那就只要3元6角。问此人甲、乙、丙三种灯泡各买了几只？

解：设此人甲、乙、丙三种灯泡各买了x，y，z（只）。则

$$\begin{cases} 5x+7y+9z=52 & (1) \\ 3x+5y+7z=36 & (2) \end{cases}$$

将（2）×5－（1）×3，消去x，并简化成

$$y+2z=6$$

解得
$$\begin{cases} y=6-2K \\ z=K \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

代入（1）式得：$x=K+2$

由于灯泡的只数是正整数，故$0<K<3$。

取$K=1$，2得(x, y, z)的二组正整数解为(3，4，1)，(4，2，2)

所以此人买的灯泡只数有二种可能，第一种可能是买甲种3只，乙种4只，丙种1只；第二种可能是买甲种4只，乙种2只，丙种2只。

三元以上的一次不定方程组，如果未知数的个数仅比方程数多一个，其整数解或正整数解的求法可按三元一次不定方程组的解法类推之。即通过消元法转化成二元一次不定方程来求解。

例17 求方程组的正整数解。

$$\begin{cases} 2x-y-2z+4w=10 & (1) \\ 4x+y-4z-2w=-14 & (2) \\ 3x+4y-z+w=12 & (3) \end{cases}$$

解：先从方程组中消去w.

(2)×2+(1)得　$10x+y-10z=-18$　　(4)

(3)×2+(2)得　$10x+9y-6z=10$　　(5)

再消去x

(5)－(4)　得　$8y+4z=28$　即$2y+z=7$

解之。$\begin{cases} y=K_1 & (6) \\ z=7-2K_1 & (7) \end{cases}$　(K_1为整数)

代入(5)式，整理得：$10x+21K_1=52$

很容易观察到一组正整数解，为：

$\begin{cases} x=1 \\ K_1=2 \end{cases}$　由此得通式$\begin{cases} x=-21K_2+1 & (8) \\ K_1=10K_2+2 & (9) \end{cases}$

(K_2为整数)，将(9)式代入(6)(7)二式得

$$\begin{cases} y=10K_2+2 & (10) \\ z=-20K_2+3 & (11) \end{cases}$$

又将(8)(10)(11)式代入(1)式，解出$w=3K_2+4$。

综上所解：

$$\begin{cases} x=-21K_2+1 \\ y=10K_2+2 \\ z=-20K_2+3 \\ w=3K_2+4 \end{cases} \quad (K_2\text{为整数})$$

显然K_2只有取“0”，才能使x，y，z，w都是正整数。

此时有唯一解为：$x=1$，$y=2$，$z=3$，$w=4$

例18 有一个四位数，已知其十位数字加1等于其个位数字，个位数字加1等于其百位数字。又把这个四位数的四个数字反着次序排列所成的数与原数相加，和为10769。求这个四位数。

解：设这个四位数为$\overline{abcd}$.

$$\begin{cases} c+1=d & (1) \\ d+1=b & (2) \\ (1000d+100c+10b+a)+(1000a+100b+10c+d) & \end{cases}$$

$$=10769 \qquad (3)$$

化简（3）式，约去公约数11，成为

$$91(a+d)+10(b+c)=979 \qquad (4)$$

设：$(a+d)=u$，$(b+c)=v$，代入(4)式得

$$91u+10v=979$$

由于a，b，c，d为非负整数，故u，v为正整数。解得

$$\begin{cases} u=979-10K \\ v=91K-979\times 9 \end{cases} \quad (K为整数)$$

且 $\left[\frac{979\times 9}{91}\right]<K\leqslant\left[\frac{979}{10}\right]$

只能取$K=97$，因此

$$\begin{cases} u=9 \\ v=16 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} a+d=9 & (5) \\ b+c=16 & (6) \end{cases}$$

从(1)(2)式得：$c=d-1$，$b=d+1$

代入(6)式得：$2d=16$，$d=8$

再代入(1)，(2)，(5)式得：$c=7$，$b=9$，$a=1$

所以这个四位数是1978。

练　　习

(23)已知K是一个整数，问K取何值时下列方程组的解都是正数？

$$\begin{cases}3x+7y-K=0\\2x+5y=20\end{cases}$$

(24) $\begin{cases}x-y+z=107\\5x+3y=505\end{cases}$

求方程组整数解的通式，并计算它有多少组正整数解。

(25) $\begin{cases}3x+6y-2z=22\\5x+8y-6z=28\end{cases}$

求方程组的一切整数解。

(26) $\begin{cases}2x+3y=53\\4y+5z=104\\6z+7w=135\end{cases}$

求方程组的正整数解。

(27)求一最小正整数，它被19除余4，被11除余1。

(28)一个自然数与3的和是5的倍数，与3的差是6的倍数，这个自然数最小为几？

(29)学校里进行学习竞赛，优胜者奖给各种学习参考读物，共分三等。如果一等奖每人发5本，二等奖每人发3本，三等奖每人发2本，共要34本。如果一等奖每人发6本，二等奖每人发4本，三等奖每人发1本，那末只要28本。问这次竞赛得一等奖、二等奖、三等奖的各有几个人？

六、中国古代一些一次不定方程问题的解

有了解一次不定方程组的知识，我们就可以来解决古代“算经”上提出的几个问题。

1. “五家共井”：五家合用一口井，各家汲水的绳子不一样长，而且都太短。井的深度等于甲家绳长的 2 倍加上乙家的绳长；或等于乙家绳长的 3 倍加上丙家的绳长；或等于丙家绳长的 4 倍加上丁家的绳长；或等于丁家绳长的 5 倍加上戊家的绳长；或等于戊家绳长的 6 倍加上甲家的绳长。问井深多少？各家绳长是多少？

设井深为w个单位长，各家绳长分别为a，b，c，d，e个单位长。则可得到五个方程。

$$\begin{cases} w = 2a + b & (1) \\ w = 3b + c & (2) \\ w = 4c + d & (3) \\ w = 5d + e & (4) \\ w = 6e + a & (5) \end{cases}$$

由（1）式得 $b = w - 2a$ （6）

（6）式代入（2）式 $c = 6a - 2w$ （7）

（7）式代入（3）式　$d = 9w - 24a$　　　　　　（8）

（8）式代入（4）式　$e = 120a - 44w$　　　　　（9）

（9）式代入（5）式得：$265w - 721a = 0$

这样消去了b，c，d，e四个未知数，成为二元一次不定方程。解之，并顺次代入(6)(7)(8)(9)各式，得

$w = 721K$，$a = 265K$，$b = 191K$，$c = 148K$，$d = 129K$，

$e = 76K$

这里K为参数，由于井深与绳长均为正整数，若取$K = 1$，得井深721个单位长，甲家绳长为265个单位长，乙家绳长为191个单位长，丙家绳为148单位长，丁家绳为129单位长，戊家绳为76单位长。

取$K = 2, 3, \cdots$时，可得许许多多以至无限的解，但实际上井深是有一定限度的，所以K值在实际上是有限制的。

2．"物不知数"："今有物不知其数，三三数之余二；五五数之余三；七七数之余二，问物几何。"

设物的数目为N，按题意列出的方程有三个，未知数有四个N，a，b，c，均为正整数。

$$\begin{cases} N = 3a + 2 & (1) \\ N = 5b + 3 & (2) \\ N = 7c + 2 & (3) \end{cases}$$

先消去N，得

$$\begin{cases} 5b - 3a = -1 & (4) \\ 5b - 7c = -1 & (5) \end{cases}$$

再消去b得：$7c - 3a = 0$

解出 $\begin{cases} a=7K_1 & (6) \\ & (K_1\text{为整数}) \\ c=3K_1 & (7) \end{cases}$

代入（4）式得：$5b-21K_1=-1$

解之，$\begin{cases} b=21K_2+4 & (8) \\ & (K_2\text{为整数}) \\ K_1=5K_2+1 & (9) \end{cases}$

将（8）、（9）式代入（2）、（6）、（7）式，得

$N=105K_2+23$；$(a=35K_2+7,\ c=15K_2+3)$.

即为"物不知数"题整数解的通式。

当 $K_2=0$时，$N=23$为最小正整数解，就是《孙子算经》上所载的答案。

从上面的通式中还可得 $N=128$，233，338，都是实际可能的答案。但K_2的值不可能无穷大，总有一个实际允许的范围，否则"三三数之"要数到什么时候？

3. "百鸡题"："公鸡一只值钱五。母鸡一只值钱三。小鸡三只值钱一。今有一百钱，共买鸡一百只。其中公鸡、母鸡、小鸡都有，问各买几只？"

设所买的一百只鸡中，公鸡为 x 只，母鸡为 y只，小鸡为 z 只，则

$$\begin{cases} x+y+z=100 & (1) \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 & (2) \end{cases}$$

将(2)式乘以3，减去(1)式，消去z。得

$$7x+4y=100$$

按连分数法解之，得

$$\begin{cases} x = -4K - 100 \\ y = 7K + 200 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

代入(1)得$z = -3K$。

$$\text{由于}\begin{cases} -100 - 4K > 0 \\ 7K + 200 > 0 \\ -3K > 0 \end{cases}$$

解得 $-28\frac{4}{7} < K < -25$

只能取K为-26，-27，-28，共得(x, y, z)三组正整数解。

(4，18，78)，(8，11，81)，(12，4，84)

所以此题有三种可能。其一为公鸡4只，母鸡18只，小鸡78只。其二为公鸡8只，母鸡11只，小鸡81只。其三为公鸡12只，母鸡4只，小鸡84只。

本题若以第二节叙述的方法解，也可以，此时通式为：

$$\begin{cases} x = 4K' \\ y = -7K' + 25 \\ z = 3K' + 75 \end{cases} \quad (K'\text{为整数})$$

如以$K' = -25 - K$代换，即得前通式。因此实质上二个通式是一样的。

下面是几道古代的不定方程问题，读者有兴趣可以试一试。

练　　习

(30)公元1372年，严恭编的《通原算法》中有一道穿铜钱的问题："今有散钱不知其数，作七十七陌穿之，欠五十凑穿；若作七十八陌穿之，不多不少。问钱数若干。"古代的钱是圆形的铜质硬币，中有方孔，可一枚枚穿起来。

(31)历史上民间曾广泛流传的"百蛋题"是这样的："一百钱买一百只蛋。鹅蛋、鸭蛋、鸡蛋都有。鹅蛋五钱一个，鸭蛋三钱一个，鸡蛋半钱一个。问一百只蛋中鹅蛋、鸭蛋、鸡蛋各有几只？"

(32)杨辉的《续古摘奇算法》(1275年)中有一题为："二数余一，五数余二，七数余三，九数余四，问本数。"

七、多元一次不定方程

我们先来研究一种特殊形式的三元一次不定方程的正整数解，

$$ax+by+cz=d$$

其中a，b，c，d都是正整数，且a，b，c互质。

从二元一次不定方程可以推知三元一次不定方程当a，b，c有大于1的公约数K时，如d无此公约数，则方程无整数解。若d亦有约数K，那末通过将方程各项除以K，总可得到x，y，z的系数无大于1的公约数的三元一次方程。所以我们只要讨论a，b，c互质的情况。

设a，b，c三者中c最大，那末z的可取值范围为：

$$1\leqslant z\leqslant\left[\frac{d-a-b}{c}\right]$$

又设$ax+by=d-cz=u$。

由于z的数值有限，故对应u的数值也有限，今取z的值为z_1，$z_2\cdots z_n$，得对应的u_1，$u_2\cdots u_n$，即

z_1对应有　$ax_1+by_1=u_1$

z_2对应有　$ax_2+by_2=u_3$

…　　　　…

z_n对应有　$ax_n+by_n=u_n$

共n个二元一次不定方程，将它们全部解出，就是原三元一次不定方程的正整数解。为：

z_1，x_{11}，y_{11}

z_1，x_{12}，y_{12}

…

z_2，x_{21}，y_{21}

z_2，x_{22}，y_{22}

…

z_n，x_{n1}，y_{n1}

z_n，x_{n2}，y_{n2}

…

由上可见，当d充分大时($d \geqslant a+b+c$)，三元一次方程$ax+by+cz=d$有正整数解，且解的组数有限。

如果包括"零"解，显然仍为有限解。当$d=0$时，有唯一非负整数解：

$$x=y=z=0$$

例19 求$3x+2y+8z=40$ 的正整数解。

解：z 的取值范围为

$$1 \leqslant z \leqslant \left[\frac{40-3-2}{8}\right]=4$$

于是 $z_1=1$，$3x_1+2y_1=32$。此时 (x_1, y_1) 有五组正整数解：(10，1)，(8，4)，(6，7)，(4，10)，(2，13)。

$z_2=2$，$3x_2+2y_2=24$。此时 (x_2, y_2) 有三组正整数解：(6，3)，(4，6)，(2，9)。

$z_3=3$，$3x_3+2y_3=16$。此时 (x_3, y_3) 有二组

正整数解：(4，2)，(2，5)。

$z_4=4$，$3x_4+2y_4=16$。此时 (x_4, y_4) 有一组正整数解：(2，1)。

总之，x，y，z共有11组正整数解为：

(10，1，1)，(8，4，1)，(6，7，1)，(4，10，1)，(2，13，1)，(6，3，2)，(4，6，2)，(2，9，2)，(4，2，3)，(2，5，3)，(2，1，4)。

从此例可以知道$ax+by+cz=d$的正整数解或包括零解的非负整数解虽然有限，但往往解的组数非常之多。是否有办法知道这种方程正整数解或非负整数解的组数呢？我们用无穷递减等比级数来探讨。

设：不定方程 $ax+by+cz=d$ （a，b，c，是互质正整数，d是非负整数）有正整数解(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) …其中$x_1<x_2<$…

又设，$0<q<1$，则$q^a<1$。

以"1"为首项，q^a为公比的无穷递减等比级数的和是

$$\frac{1}{1-q^a}$$ 即

$$\frac{1}{1-q^a}=1+q^a+q^{2a}+\cdots+q^{x_1a}+\cdots+q^{x_2a}+\cdots$$

同样地有：

$$\frac{1}{1-q^b}=1+q^b+q^{2b}+\cdots+q^{y_1b}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-q^c}=1+q^c+q^{2c}+\cdots+q^{z_1c}+\cdots$$

将三式二边分别相乘：

$$\frac{1}{(1-q^a)(1-q^b)(1-q^c)}=(1+q^a+q^{2a}+\cdots+q^{x_1a}$$

$$+\cdots+q^{x_2a}+\cdots)\cdot(1+q^b+q^{2b}+\cdots+q^{y_1b}+\cdots)\cdot(1+q^c+q^{2c}$$

$$+\cdots+q^{z_1c}+\cdots)$$

将右边乘出来，整理得

$$右边=1+A_1q+A_2q^2+\cdots+A_dq^d+\cdots$$

由于$ax+by+cz=d$，在三式相乘中有：

$$q^{x_1a+y_1b+z_1c}=q^d,\ q^{x_2a+y_2b+z_2c}=q^d,\ \cdots$$

可知最后 q^d 的系数 A_d 即是不定方程$ax+by+cz=d$的非负整数解的组数。因上列各式首项“1”作为$q^{0\cdot a}$或$q^{0\cdot b}$或$q^{0\cdot c}$故A_d所表示的解的组数是包括“零”解在内的。

这个推算方法也适用于二元一次不定方程和三元以上的一次不定方程，但在实际计算中，相应系数A的求得是比较复杂的。

例20 求$x+2y+11z=100$的正整数解的组数。

解：移项成$x+2y=100-11z$。这里$a=1$，$b=2$。

设 $x+2y=u$，$0<q<1$，（u为正整数）

按上述方法，取

$$\frac{1}{(1-q^a)(1-q^b)}=\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}$$

$$=(1+q+q^2+\cdots)\cdot(1+q^2+q^4+\cdots)$$

$$=1+A_1q+A_2q^2+\cdots+A_uq^u+\cdots\quad(1)$$

为了求出q^n的系数A_n，下面进行变换。

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}=\frac{1}{(1-q)^2(1+q)}$$

设
$$\frac{1}{(1-q)^2(1+q)}=\frac{m}{1+q}+\frac{n}{1-q}-\frac{l}{(1-q)^2} \qquad (2)$$

由于$\frac{m}{1+q}+\frac{n}{1-q}+\frac{l}{(1-q)^2}$

$$=\frac{m(1-q)^2+n(1-q^2)+l(1+q)}{(1+q)(1-q)^2}$$

$$=\frac{(m-n)q^2+(-2m+l)q+(m+n+l)}{(1+q)(1-q)^2}$$

与(2)式左边的原式比较，得

$$\begin{cases} m-n=0 \\ -2m+l=0 \\ m+n+l=1 \end{cases}$$

解之。$m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{1}{4}$，$l=\frac{1}{2}$。

代入(2)式。

$$\frac{1}{(1-q)^2(1+q)}$$

$$=\frac{1}{4(1+q)}+\frac{1}{4(1-q)}+\frac{1}{2(1-q)^2}$$

$$=\frac{1}{4}[1-q+q^2-\cdots+(-1)^n q^n+\cdots]$$

$$+\frac{1}{4}(1+q+q^2+\cdots+q^u+\cdots)+\frac{1}{2}(1+q+q^2+\cdots+q^u$$

$$+\cdots)\cdot(1+q+q^2+\cdots+q^u+\cdots) \qquad (3)$$

由于$q^{x+2y}=q^u$，比较(1)(3)二式，可知(3)式中q^u项的系数即A_u是为不定方程$x+2y=u$的非负整数解的组数。

(3)式中$\frac{1}{4}[1-q+q^2-\cdots+(-1)^u q^u+\cdots]$项内$q^u$的系数是$\frac{1}{4}(-1)^u$

又 $\frac{1}{4}(1+q+q^2+\cdots+q^u+\cdots)$ 项内q^u的系数是$\frac{1}{4}$。

而 $\frac{1}{2}(1+q+q^2+\cdots+q^u+\cdots)(1+q+q^2+\cdots+q^u+\cdots)$

项内q^u的系数可将相乘的$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot q^u$；$\frac{1}{2}\cdot q\cdot q^{u-1}$；$\frac{1}{2}\cdot q^2\cdot q^{u-2}\cdots$

共$u+1$项的系数相加得到，即此q^u的系数为$\frac{1}{2}(u+1)$。

总之， $$A_u=(-1)^u\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(u+1) \qquad (4)$$

这里包含有零解。因为$100-11z\neq 0$，故$u\neq 0$，即x，y不能同时为0。

当$x=0$时，$y=\frac{u}{2}$。u为奇数，无整数解。u为偶数，则有一解。也就是当$x=0$时，有$\frac{1+(-1)^u}{2}$组解。

当$y=0$时，$x=u$，总有一解。

所以$x+2y=u$的正整数解的组数为：

$$A_u - \frac{1+(-1)^u}{2} - 1$$

$$=(-1)^u \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(u+1) - \frac{1+(-1)^u}{2} - 1$$

$$=\frac{1}{4}[2u-3-(-1)^u] \qquad (5)$$

由于$0 \leqslant z \leqslant \left[\frac{100-1-2}{11}\right]=8$，将$z$的值列表如下：

z	1	2	3	4	5	6	7	8
u	89	78	67	56	45	34	23	12

得对应的u值逐个代入(5)式，并相加。

$$\frac{1}{4}\Big\{[2\times 89-3+1]+[2\times 78-3-1]+\cdots$$

$$+[2\times 12-3-1]\Big\}$$

$$=\frac{1}{4}[2\times\frac{89+12}{2}\times 8-24]=196$$

所以$x+2y+11z=100$有196组正整数解。

上面讨论的是三元一次不定方程$ax+by+cz=d$当a，b，c，d为正整数时的正整数解，或d为非负整数时的非负整数解。

现在我们进一步来求较为一般的三元一次不定方程的整

数解。

$$ax + by + cz = d$$

a，b，c是整数，最大公约数是1，d也是整数。

它的整数解的通式可以仿照第二节解二元一次不定方程时用过的有效方法来求得。

例21　求$25x - 13y + 7z = 4$的整数解。

解：方程$25x - 13y + 7z = 4$以其x, y, z的系数中最小的一个7来除，并将整数部分分离，求出z。

$$z = \frac{-25x + 13y + 4}{7}$$

$$= -3x + y - \frac{4x - 6y - 4}{7} \qquad (1)$$

由于x, y, z均为整数，形式上的分数部分实质上也是整数。

设　$\frac{4x - 6y - 4}{7} = t_1$（$t_1$为整数）

则得$4x - 6y - 4 - 7t_1 = 0$.

仍按此法，以x，y，t_1的系数中最小的4来除方程式的各项，并求出x，分离整数部分。得

$$x = y + t_1 + 1 + \frac{2y - 3t_1}{4} \qquad (2)$$

再设$\frac{2y + 3t_1}{4} = t_2$（$t_2$为整数）

如此继续下去可得：

$$y = -t_1 + 2t_2 - \frac{t_1}{2} \qquad (3)$$

最后设$\frac{t_1}{2}=t_3$（t_3为整数）得$t_1=2t_3$

代入（3）式，得$y=2t_2-3t_3$

将t_1及y的表达式代入（2）式。

$$x=2t_2-3t_3+2t_3+1+\frac{4t_2-6t_3+6t_3}{4}=3t_2-t_3+1$$

将x,y的表达式代入（1）式，并整理得

$$z=-7t_2-2t_3-3$$

于是原三元一次不定方程整数解的通式为

$$\begin{cases}x=3t_2-t_3+1\\ y=2t_2-3t_3 \qquad (t_2,\ t_3\text{为整数})\\ z=-7t_2-2t_3-3\end{cases}$$

这里t_2和t_3是二个整值参数，对于每一整数对(t_2,t_3)有一适合原方程的整数组(x,y,z)与之对应。与二元一次不定方程整数解的通式相比多了一个参数。

若是要求方程的正整数解，则t_2，t_3需满足不等式组：

$$\begin{cases}3t_2-t_3+1>0\\ 2t_2-3t_3>0\\ -7t_2-2t_3-3>0\end{cases}$$

这涉及到解二元一次不等式组了。今解之如下。

按 $\begin{cases}t_3<3t_2+1\\ t_3<\frac{2}{3}t_2\\ t_3<\frac{-7t_2-3}{2}\end{cases}$

分三种情况讨论：

1° 当（$3t_2+1$），$\frac{2}{3}t_2$ 和 $\frac{-7t_2-3}{2}$ 三者中（$3t_2+1$）最小时，

$$\begin{cases} 3t_2+1\leqslant \frac{2}{3}t_2 \\ 3t_2+1\leqslant \frac{-7t_2-3}{2} \end{cases} \quad (t_2\text{为整数})$$

解得 $t_2\leqslant -1$

此时 $t_3<3t_2+1$。

2°当三者中 $\frac{2}{3}t_2$ 最小时，

$$\begin{cases} \frac{2}{3}t_2\leqslant 3t_2+1 \\ \frac{2}{3}t_2\leqslant \frac{-7t_2-3}{2} \end{cases} \quad (t_2\text{ 为整数})$$

解得。$\begin{cases} t_2\geqslant -\frac{3}{7} \\ t_2\leqslant -\frac{9}{25} \end{cases}$

无整数适合，此种情况不成立。

3°当 $\frac{-7t_2-3}{2}$ 最小时，

$$\begin{cases} \frac{-7t_2-3}{2}\leqslant 3t_2+1 \\ \frac{-7t_2-3}{2}\leqslant \frac{2}{3}t_2 \end{cases} \quad (t_2\text{ 为整数})$$

解得 $t_2\geqslant 0$

此时 $t_3<\frac{-7t_2-3}{2}$

所以取满足 $\begin{cases} t_2\leqslant -1 \\ t_3<3t_2+1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t_2\geqslant 0 \\ t_3<\frac{-7t_2-3}{2} \end{cases}$

的整数对 (t_2, t_3) 代入通式，即得x，y，z的正整数解。

前面的例（20）也可用这个方法来解，得到的整数解通式为：

$$\begin{cases} x=t_1 \\ y=5t_1-11t_2+50 \quad (t_1,\ t_2 \text{ 为整数}) \\ z=2t_2-t_1 \end{cases}$$

其正整数解只要取满足

$$\begin{cases} 0<t_1\leqslant 100-2-11=87 \\ \frac{t_1}{2}<t_2<\frac{5t_1+50}{11} \end{cases}$$

的整数对 (t_1, t_2) 代入通式即可。如前计算共有196组。(注意：在 0 到87间取的t_1值，不一定有整值 t_2与之对应。如取 $t_1=86$则$43<t_2<43\frac{7}{11}$，无一整数合适，此种情况应舍去)

将上述有效方法推而广之，可以求得多元一次不定方程 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=b$ 的整数解通式。这里 a_1，$a_2\cdots a_n$是整数，最大公约数为 1，b也是整数。

当a_1，a_2，…，a_n的公约数$K\neq 1$时，若b无此公约数，

则不定方程无整数解。若 b 也有此约数，则可将方程各项先除以 K，从而得到各项系数的最大公约数是 1 的一次不定方程。

例22　求 $21x_1+12x_2-6x_3+9x_4=6$ 的整数解的通式。

解：原方程各项系数有公约数 3 先约去之，成为

$$7x_1+4x_2-2x_3+3x_4=2$$

然后运用前述方法，以未知数系数中最小的 2 去除各项，求出 x_3，并分离其整数部分。

$$x_3=3x_1+2x_2+x_4-1+\frac{x_1+x_4}{2}\cdots \qquad (1)$$

设 $\dfrac{x_1+x_4}{2}=t_1$ （t_1 为整数）

得 $x_1+x_4=2t_1$

又设 $x_4=t_2$ （t_2 为整数）

得 $\quad x_1=2t_1-t_2$

以 x_1，x_4 的表达式代入（1）式。得

$$\begin{aligned}x_3&=6t_1-3t_2+2x_2+t_2-1+t_1\\&=7t_1-2t_2+2x_2-1\end{aligned}$$

设 $x_2=t_3$，（t_3 为整数）代入上式。

$$x_3=7t_1-2t_2+2t_3-1$$

于是得原四元一次不定方程整数解的通式为

$$\begin{cases}x_1=2t_1-t_2\\x_2=t_3\\x_3=7t_1-2t_2+2t_3-1\\x_4=t_2\end{cases}$$

此解依赖于 t_1，t_2，t_3三个整值参数。如取 $t_1=1, t_2=2$，$t_3=3$ 则得 x_1，x_2，x_3，x_4 的一组整数解为（0，3，8，2）。

一般地 n 元一次不定方程，如果只有一个方程，则其整数解的通式需依赖于（$n-1$）个整值参数。

例23 一个正整数，如果用九进位制表示出来，则成 $\overline{ABC}$。如果用七进位制表示出来则成$\overline{CBA}$。试用十进位制求出这个正整数。（1975年美国纽约数学竞赛题）

解一：设用十进制表示的这个正整数为 x。按题意，

$$x=9^2A+9B+C=7^2C+7B+A \qquad (1)$$

从(1)式整理得：

$$40A+B=24C \qquad (2)$$

（2）式中$40A$与$24C$有公约数 8，今以 8 除（2）式各项得：

$$\frac{B}{8}=3C-5A \qquad (3)$$

因右边$3C-5A$为整数，所以B必能被 8 整除，故B为 0 或 8。按题目要求 $0\leqslant B<7$（否则七进制数$\overline{CBA}$就不成立了），因此B只能是 0。

同样 $0\leqslant A<7$，$0\leqslant C<7$。（A，B，C不能同时为0）。从

$$3C-5A=0$$

可知$A=3$　$C=5$。

以A，B，C之值代入(1)式，得

$$x=248$$

所以，这个正整数用十进制表示出来是248。

解二，在获得解一中的(2)式后，可先求其整数解的通式。

设$B=t_1$ （t_1为整数）

代入(2)式，以24除各项，并解出C。

$$C=A+\frac{16A+t_1}{24}$$

设 $\frac{16A+t_1}{24}=t_2$（t_2为整数），得：

$$16A+t_1=24t_2,\quad A=t_2+\frac{8t_2-t_1}{16}$$

设 $\frac{8t_2-t_1}{16}=t_3$（t_3为整数），得：

$$8t_2-t_1=16t_3,\quad t_2=2t_3+\frac{t_1}{8}$$

设 $\frac{t_1}{8}=t_4$ （t_4为整数），得：

$$t_1=8t_4$$

再按序倒代上去，得

$$t_2=2t_3+4$$

$$\begin{cases}A=3t_3+4\\B=8t_4\\C=5t_3+2t_4\end{cases}\qquad (t_3,t_4\text{为整值参数})$$

由于A，B，C都是0至6间的整数。

由　　$0\leqslant 8t_4\leqslant 6$

可知　　$t_4=0$

再由　　$0 \leqslant 5t_3 + 2t_4 = 5t_3 \leqslant b$

可知　　$t_3 = 0$ 或 1 。

但 t_3 t_4 同为 0 时，A, B, C全为 0 ，与题意不符。故知

$$t_3 = 1，t_4 = 0$$

于是$A = 3$，$B = 0$，$C = 5$，得这个正整数用十进制表示为248。

又解二求整数解通式时，也可设$B = 8t$（t为整数）

代入(2)式得：

$$3C - 5A = t$$

按连分数法解之。

$$\frac{3}{5} = 0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}。$$

这里项数$n = 4$，$\frac{3}{5}$的前一近数$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$。

得通式 $\begin{cases} C = 5K + 2t \\ A = 3K + t \end{cases}$　（K，t为整数）

例24　有人以最快的速度从甲地到乙地，早晨出发步行到火车站，乘快车，下车后接着又乘直达汽车，当天下午就到了目的地。他算了一下一路上步行的时间，乘火车的时间和乘汽车的时间，按小时计算恰巧都是整数。已知二地路程为 524 公里，步行平均速度为每小时 6 公里，火车平均速度为每小时74公里，汽车平均速度为每小时42公里。问此人步行，乘火车，乘汽车各用了多少小时？

解一，设此人从甲到乙步行 x 小时，乘火车 y小时，乘

汽车 z 小时。则

$$6x+74y+42z=524$$

各项有公约数2，化简成

$$3x+37y+21z=262$$

按 $$0<y\leqslant\left[\frac{262-3-21}{37}\right]=6$$

取 $y_1=1$，得 $3x_1+21z_1=225$ (1)

$y_2=2$ $3x_2+21z_2=188$ (2)

$y_3=3$ $3x_3+21z_3=151$ (3)

$y_4=4$ $3x_4+21z_4=114$ (4)

$y_5=5$ $3x_5+21z_5=77$ (5)

$y_6=6$ $3x_6+21z_6=40$ (6)

由于 x、z 的系数有公约数3，而188，151，77，40无此约数，故知方程式(2)(3)(5)(6)无整数解。

从方程(1)各项除以公约数3。得

$$x_1+7z_1=75$$

解之 $\begin{cases}x_1=75-7K_1\\ z_1=K_1\end{cases}$ （K_1为整数）

于是 $x_1+y_1+z_1=76-6K_1$

由于此人是当天到达目的地，总共用的时间少于24小时。取 $K_1=1$，2，3，…，9时，都不合题意。

取 $K_1=10$，得 x，y，z 一组正整数解(5，1，10)

K_1不能大于10，否则 x 为负数。

同样地从方程(4)各项约去3，成为

$$x_4+7z_4=38$$

解出 $\begin{cases} x_4 = 38 - 7K_2 \\ z_4 = K_2 \end{cases}$　　（K_2为整数）

取$K_2 = 4$，5，得二组正整数解：（10，4，4），（3，4，5）

上面三组解总共用的时间分别为16小时，18小时，12小时。前面二组解路上用的时间较长，实际上比较符合题意的是第三组解。即此人从甲到乙路上步行 3 小时，乘火车 4 小时，乘汽车 5 小时。

解二，本例也可先求出适合方程$3x + 37y + 21z = 262$的一切整数解的通式。

变形　　$x = 87 - 12y - 7z + \frac{1-y}{3}$　　（7）

设$\frac{1-y}{3} = t_1$，即$y = 1 - 3t_1$。又设$z = t_2$（t_1, t_2是整数）

代入(7)式，得通式

$$\begin{cases} x = 37t_1 - 7t_2 + 75 \\ y = 1 - 3t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

其正整数解需满足不等式组

$$\begin{cases} 37t_1 - 7t_2 + 75 > 0 & (8) \\ 1 - 3t_1 > 0 & (9) \\ t_2 > 0 & (10) \end{cases}$$

从（8）式解出

$$t_2 < \frac{37t_1 + 75}{7}$$

又按(10)式得

$$0 < t_2 < \frac{37t_1 + 75}{7} \qquad (11)$$

即 $\frac{37t_1 + 75}{7} > 0$

解得 $t_1 \geqslant -2$

又从(9)式知 $t_1 < \frac{1}{3}$

所以 $-2 \leqslant t_1 \leqslant 0$

取 $t_1 = -2$ 时，$0 < t_2 < \frac{-74 + 75}{7} = \frac{1}{7}$

无整数适合，即不存在整数 t_2。

取 $t_1 = -1$ 时，仍由(11)式得 $t_2 = 1,2,3,4,5$。有五组解。

$$\begin{cases} x = 31, 24, 17, 10, 3, \\ y = 4, 4, 4, 4, 4; \\ z = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

取 $t_1 = 0$ 时，t_2 可取 $1,2,3,\cdots,10$。得十组解，按 x, z 各自成等差级数的办法写出为：

$$\begin{cases} x = 68, 61, 54, \cdots, 12, 5 \\ y = 1, 1, 1, \cdots, 1, 1 \\ z = 1, 2, 3, \cdots, 9, 10 \end{cases}$$

由题意 $x + y + z \approx 12$（小时）。

所以比较合题的答案为此人从甲到乙步行3小时，乘火车4小时，乘汽车5小时。

练　　习

（33）求适合方程$7x+9y+2z=42$的所有正整数解。

（34）求$13x+6y+9z=83$的正整数解.

（35）计算不定方程 $2x+21y+z=100$ 的正整数解的组数。

（36）求$-5x-4y+3z=10$整数解的通式。

（37）求$12x+y-11z=10$整数解的通式。

（38）求$6x-5y+3z=1$整数解的通式。

（39）求$7x+8y+10z+12w=62$的正整数解。

（40）求$5x_1+4x_2-7x_3-3x_4=5$的整数解通式。

（41）有一块184克重的合金，由若干锌块，铜块，镍块熔合而成。已知锌块每块重量为24克，铜块每块重量为16克，镍块每块重量为11克。问三种合金各应取几整块才能熔合成这么一块合金？并求出合金中锌、铜、镍的重量比。

（42）有三种书，每本价格各为3角、5角和4角。小王手头共有2元7角，想买这三种书各若干本而使钱数正好用完，共有几种买法？

八、一次不定方程在线性规划中的应用

多元一次不定方程组的应用非常广泛，例如在规划论中．就经常会遇到许许多多的不定方程。在这一节里我们介绍一些不定方程在线性规划中的应用。

例25　制造某一机床时，每台机床需要甲、乙、丙三种不同尺寸的轴各一根。其长度规格分别为 $3.35m$，$2.15m$，$1.7m$。这些轴的横截面相同，可用同一种圆钢来截取。已知这种圆钢的长度是 $8.4m$，现在要制造100台机床，最少要用多少根这样的圆钢来造轴？如何截法最省料？

首先我们分析一下，一根 $8.4m$ 长的圆钢截成甲．乙，丙三种机轴，有多少种截法？每种截法的剩下余料是多少？列表如下：

截法编号	甲种根数 ($3.35m$)	乙种根数 ($2.15m$)	丙种根数 ($1.7m$)	剩　料 (m)
(1)	2	0	1	0
(2)	1	2	0	0.75
(3)	1	1	1	1.2
(4)	1	0	2	1.65

（续表）

截法编号	甲种根数 (3.35m)	乙种根数 (2.15m)	丙种根数 (1.7m)	剩　料 (m)
(5)	0	3	1	0.25
(6)	0	2	2	0.7
(7)	0	1	3	1.15
(8)	0	0	4	1.6

从此表可见截法(3)(4)(7)(8)剩料太多不经济，今取截法(1)(2)(5)(6)加以搭配，使甲、乙、丙三种机轴配成100套，且要用料最省。

设用截法(1)截取的8.4m 长的圆钢根数为x_1，同样设用截法(2)(5)(6)截取的圆钢的根数各为x_2, x_3, x_4。

这样甲种机轴为　$2x_1 + x_2 = 100$　(1)

乙种机轴为　$2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 100$　(2)

丙种机轴为　$x_1 + x_3 + 2x_4 = 100$　(3)

这里x_1, x_2, x_3, x_4为非负整数。

题目要求用料最省，即 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$最小，在线性规划中称$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$为目标函数。

解上面的不定方程，以(2)式减去(3)式得

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad (4)$$

将(4)式乘以2，再加上(1)式得

$$5x_2 + 4x_3 = 100 \quad (5)$$

解(5)式得

$$\begin{cases} x_2 = 100 - 4t_1 \\ x_3 = 5t_1 - 100 \end{cases} \quad (t_1\text{为整数})$$

代入(1)式$x_1 = 2t_1$

再代入(3)式

$$x_4 = 100 - \frac{7t_1}{2}$$

命$t_2 = 2t_1$进行代换，即得整数解通式。

$$\begin{cases} x_1 = 4t_2 \\ x_2 = 100 - 8t_2 \\ x_3 = 10t_2 - 100 \\ x_4 = 100 - 7t_2 \end{cases} \qquad (t_2\text{为整数})$$

其非负整数解需满足

$$\begin{cases} 4t_2 \geqslant 0 \\ 100 - 8t_2 \geqslant 0 \\ 10t_2 - 100 \geqslant 0 \\ 100 - 7t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解得　$10 \leqslant t_2 \leqslant 12$

而　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4t_2 + (100 - 8t_2) + (10t_2 - 100) + (100 - 7t_2)$

$= 100 - t_2$

要使目标函数取最小值，则$t_2 = 12$。

此时　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 88$（根）

$x_1 = 48$，$x_2 = 4$，$x_3 = 20$，$x_4 = 16$。

所以最省料的方案为将48根圆钢按截法(1)截取，得96根甲种机轴，48根丙种机轴。将4根圆钢按截法(2)截取，

得4根甲种机轴、8根乙种机轴。将20根圆钢按截法（5）截取，得60根乙种机轴，20根丙种机轴。将16根圆钢按截法（6）截取，得32根乙种机轴，32根丙种机轴。总共用了88根圆钢，正好配成甲、乙、丙机轴100套。

在工业，农业，商业，交通运输，国防建设和工程设计中，常常碰到一些要求合理分配，全面安排的所谓线性规划问题。这类问题的解决往往与不定方程联系在一起。下面再举一个物资调运的例子。

例26 甲、乙二煤矿供应A，B，C三城市。各煤矿的产量和各城市的需要量如表：

煤矿	产 量(吨/日)	城市	需 量(吨/日)
甲	200	A	100
		B	150
乙	250	C	200

各煤矿与城市间的运输路程如表：

路程(公里) 城市 / 煤矿	A	B	C
甲	90	70	100
乙	80	65	80

要求从煤矿到城市调运煤时，所花的运输力最省，即总吨公里数最小。

解：设甲供给A的煤量为x_1吨/日，供给B的煤量为x_2吨/日，供给C的煤量为x_3吨/日。

又设乙供给A的煤量为y_1吨/日，供给B的煤量为y_2吨/日，供给C的煤量为y_3吨/日。

按条件得不定方程组：

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 100 & (1) \\ x_2 + y_2 = 150 & (2) \\ x_3 + y_3 = 200 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 200 & (4) \\ y_1 + y_2 + y_3 = 250 & (5) \end{cases}$$

运输的总吨公里数为：

$$90x_1 + 70x_2 + 100x_3 + 80y_1 + 65y_2 + 80y_2 \quad (6)$$

上面的方程数虽有五个，实质上仅为四个方程，因为 $(1)+(2)+(3)-(4)=(5)$ 故六个未知数只有四个方程。

令$x_1 = t_1$，$x_2 = t_2$ （t_1, t_2为整数），于是得解。

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 200 - (t_1 + t_2) \\ y_1 = 100 - t_1 \\ y_2 = 150 - t_2 \\ y_3 = t_1 + t_2 \end{cases}$$

其非负整数解需满足：

$$\begin{cases} t_1 \geqslant 0 \\ t_2 \geqslant 0 \\ 200 - (t_1 + t_2) \geqslant 0 \\ 100 - t_1 \geqslant 0 \\ 150 - t_2 \geqslant 0 \\ t_1 + t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解得 $0 \leqslant t_1 + t_2 \leqslant 200$ （7）

$0 \leqslant t_1 \leqslant 100$ （8）

$0 \leqslant t_2 \leqslant 150$ （9）

以通解代入(6)式，知所需运输力的总吨公里数为：

$$90t_1 + 70t_2 + (20000 - 100t_1 - 100t_2) + (8000 - 80t_1) + (9750 - 65t_2) + (80t_1 - 80t_2)$$

$$= 37750 - 10(t_1 + t_2) - 5t_2$$

要使此式值最小，需使$(t_1 + t_2)$和t_2的值最大。

从(7)式与(9)式可知，$(t_1 + t_2)$最大为200，t_2最大为150。于是t_1为50。此时

$x_1 = 50$，$x_2 = 150$，$x_3 = 0$，$y_1 = 50$，$y_2 = 0$，$y_3 = 200$

即得总吨公里数最小，运输力最省的方案。就是煤矿甲每日供给城市 A 50吨，B 150吨；煤矿乙每日供给城市 A 50吨，C 200吨。

象上面这样的不定方程在线性规划中是常有的，往往所遇到的不定方程组，其未知数的个数和方程的个数很多很多，甚至有上百个。解这类不定方程组就要借助于电子计算机了，运用电子计算机一般几分钟之内就能获得结果。当然线性规划是一门新兴的数学分支，它有它的专门理论和特殊方法，如图上作业法，表上作业法等，并不是不定方程所能代替的。

练　　习

(43)将长度为7.4m的塑料管，截成三种规格，每种规

格的长度分别为2.9m，2.1m，1.5m。取每种规格各一根，每这样三根塑料管配成一套。现在要配100套，那末至少要用7.4m长的塑料管多少根？如何截法最省料，且截割的次数较少？

(44)有甲，乙二个粮食产地，将粮食供应给A，B，C，D四个地方，产量和需要量如表：

产　地	产量(吨/年)	销　地	需量(吨/年)
甲	7000	A	2500
		B	2000
乙	4000	C	3000
		D	8500

粮食产地和销地的运输路程如表：

路程(公里) 销地 产地	A	B	C	D
甲	80	100	70	80
乙	90	70	80	70

那末如何调运粮食，最省运输力，即总吨公里数最小？

(45)从产地大同，井陉把煤运往天津，德县，石家庄的

运费如表。（单位：元/吨）

销地 产地	天　津	德　县	石家庄
大　同	3	11	3
井　陉	7	4	10

产量与需要量如表（单位：吨）

<table>
<tr><th>产　地</th><th>产　量</th><th>销　地</th><th>需　量</th></tr>
<tr><td rowspan="2">大　同</td><td rowspan="2">7</td><td>天　津</td><td>3</td></tr>
<tr><td>德　县</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="1">井　陉</td><td>9</td><td>石家庄</td><td>5</td></tr>
</table>

这是一张产销平衡表，表上数字是单位时间内的产销平衡量，不是实际的产量和需要量。

你能找到一个最好的调运方案而使运费最低么？

九、“无零勾股”

前面我们研究了一次不定方程的解，现在我们来研究二次不定方程的解。

最早的二次不定方程要算是勾股定理了。我国数学史上有许多人研究了勾股定理

$$x^2+y^2=z^2$$

的正整数解，即无零整数勾股。它的几何意义是三边都是正整数的直角三角形。我国古代有“勾三，股四，弦五”之说，是勾股定理最有名的一组正整数解。即

$$3^2+4^2=5^2$$

到公元263年，数学家刘徽编辑的《九章算术》中，曾出现

$$5^2+12^2=13^2,\qquad 8^2+15^2=17^2$$

$$7^2+24^2=25^2\qquad 20^2+21^2=29^2$$

等解答。后来又有许多数学家研究了无零整勾股解的通式。1844年清朝的陈杰在他编的《算法大成》中，把勾股定理$x^2+y^2=z^2$的正整数解归结成：

$1°$ $\begin{cases} x=3m^2-2m \\ y=4m^2-6m+2 \\ z=5m^2-6m+2 \end{cases}$ ($m>1$，且是奇数)

2° $\begin{cases} x = 6n^2 - 2n \\ y = 8n^2 - 16n + 1 \\ z = 10n^2 - 6n + 1 \end{cases}$ （n是正偶数）

当$m=3$，5 $n=2$，4时，分别得到的正整数解为

(21，20，29) (65，72，97)，(20，21，29) (88，105，137)

显然，上面的式子并没有包括所有的无零整勾股。

1906年数学家黄宗宪在他所著的《惘笑不计》一书中，有“三角垛堆整数勾股术”，写出了关于勾股正整数解的通式。

1°当$z-y=1$ 时

$$\begin{cases} x = 2m + 1 \\ y = 2m(m + 1) \\ z = 2m^2 + 2m + 1 \end{cases} \quad （m\text{是正整数}）$$

2°当$z-y=2$ 时

$$\begin{cases} x = 2(m + 1) \\ y = m^2 + 2m \\ z = m^2 + 2m + 2 \end{cases}$$

…

9°当$z-y=9$ 时

$$\begin{cases} x = 3(2m + 3) \\ y = 2m^2 + 6m \\ z = 2m^2 + 6m + 9 \end{cases}$$

…

很容易证明，黄宗宪的式子是对的。

如$z-y=1$时，通过演算可以证得

$$(2m+1)^2+[2m(m+1)]^2=(2m^2+2m+1)^2$$

然而黄宗宪的式子是如何得来的呢？

从前面我们得到启发，研究

$$x^2+y^2=z^2$$

的正整数解时，先变换成

$$z^2-y^2=x^2$$

即 $$(z-y)(z+y)=x^2$$

再加以分析。

当$z-y=1$时，z与y是相邻的二个自然数，$(z+y)$一定是奇数，且大于1。由于

$$1\cdot(z+y)=x^2$$

可以推定，x 也是大于1的奇数。

设$x=2m+1$（m为自然数）。那末

$$\begin{cases} z-y=1 \\ z+y=(2m+1)^2 \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} z=2m^2+2m+1 \\ y=2m(m+1) \end{cases}$$

即推出黄宗宪的当$z-y=1$时的通解式。

当$z-y=2$时，z与y是相隔一个自然数的二个自然数，$(z+y)$一定是偶数，且$z+y>4$。由

$$2(z+y)=x^2$$

可以推得x也是偶数，且大于2。

设$x=2(m+1)$（m为自然数）。那末

$$\begin{cases} z-y=2 \\ z+y=4(m+1)^2 \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} z=m^2+2m+2 \\ y=m^2+2m \end{cases}$$

即为黄宗宪的通解。

按照奇偶因数来分析，当$z-y$为奇数时，z与y必为一奇一偶，故$z+y$也为奇数。于是x也是奇数，且大于$z-y$。（因$z+y>z-y$）

又从 $x^2=(z-y)(z+y)$

可知x^2为$z-y$的倍数。

当$z-y$为偶数时，z与y必同时为奇数，或同时为偶数。故$z+y$也为偶数。于是x为大于$z-y$的偶数。又x^2为$z-y$的倍数。

由于$(z-y)$和$(z+y)$总是同为奇数或同为偶数，即同奇偶，所以二式相加减必为偶数，能被2整除，也就是可以得到z与y的正整数解。照这个方法将前面的推导继续下去，可得无零整勾股的各通式。

如$z-y=3$时，x^2为3的倍数。因3是质数，故x为3的倍数且大于3，同时x又是奇数。

今设$x=3(2m+1)$（m为自然数）

可得 $$\begin{cases} y=6m(m+1) \\ z=3(2m^2+2m+1) \end{cases}$$

即为$z-y=3$时的通式。

从前面的分析，可以看到黄宗宪的方法是将

$$x^2+y^2=z^2$$

化成 $$(z-y)(z-y)=x^2$$

再按奇偶数和约倍数进行分析。虽然其解有重复，通式较繁，但无限地继续下去，是可以无遗漏地得到勾股定理的正整数解的。

在国外，也有许多数学家曾从事无零整勾股的研究。

如毕达哥拉斯（*Pythagoras*）的方法是当直角三角形中，有一条直角边为正奇数 n 时，另一条直角边为 $\frac{1}{2}(n^2-1)$，斜边则为 $\frac{1}{2}(n^2+1)$。即

$$\begin{cases} x=n \\ y=\frac{1}{2}(n^2-1) \\ z=\frac{1}{2}(n^2+1) \end{cases} \qquad (n\text{为正奇数})$$

欧几里得（*Euclid*）的方法是：当 m，n 同奇偶，且 mn 是完全平方数，那末直角三角形的斜边可为 $\frac{1}{2}(m+n)$，另外二直角边是 $\frac{1}{2}(m-n)$ 和 $\sqrt{mn}$。即

$$\begin{cases} x=\sqrt{mn} \\ y=\frac{1}{2}(m-n) \\ z=\frac{1}{2}(m+n) \end{cases} \qquad (m,\ n\text{同奇偶，且}mn\text{是完全平方数})$$

柏拉图(*Plato*)的方法是在直角三角形中，若以正偶数 m 为一直角边，另一直角边为 $\frac{1}{4}(m^2-1)$，则斜边为 $\frac{1}{4}(m^2+1)$，即

$$\begin{cases} x = m \\ y = \frac{1}{4}(m^2-1) \quad (m\text{为正偶数}) \\ z = \frac{1}{4}(m^2+1) \end{cases}$$

究竟如何来推导 $x^2+y^2=z^2$ 正整数解的通式呢？

让我们先将有约倍数关系的一类正整数解归结在一起，一方面我们知道从一组互质的正整数解，例如(3，4，5)，可以得到无数组(x, y, z)，各是它的同一倍数的解。即

$(3K, 4K, 5K)$ (K是大于1的整数)

另一方面从方程

$$x^2+y^2=z^2$$

可以看出若x，y有大于1的公因数，则z一定也有这个因数，亦即x，y，z中，若有二个具有大于1的公因数，则第三个也必定会有同一因数。因此我们在讨论时先将这一类倍数解排除。

设$x^2+y^2=z^2$中，x，y，z两两互质，那末x，y，z中，不能有二个偶数，x，y中必有一个为奇数。

设，x为奇数。按

$$x^2=(z-y)(z+y)$$

其中$(z-y)$与$(z+y)$必互质。

因为如有公因数$K>1$，设$z-y=aK$，$z+y=bK$。那末

$$x^2=abK^2$$

由于x为奇数，故a，b，K均必为奇数，$a\pm b$就是偶数了。通过

$$\begin{cases} z-y=aK \\ z+y=bK \end{cases}$$

解出的z和y就有公因数K，这和前面关于x，y，z，两两互质的假设相矛盾，所以不可能。只能是

$$z-y=a，z+y=b\ (a，b\text{是互质正奇数})$$

此时　$x^2=ab$

由于a，b互质，　式只有当a和b都是完全平方数时才成立。

设$a=m^2$，$b=n^2$（m，n为互质正奇数，且$m<n$）

得　$x=mn$

$$\begin{cases} z-y=m^2 \\ z+y=n^2 \end{cases}$$

解之。$$\begin{cases} y=\dfrac{n^2-m^2}{2} \\ z=\dfrac{n^2+m^2}{2} \end{cases}$$

显然　$y=\dfrac{(n-m)(n+m)}{2}$为偶数。

这里$(n-m)$和$(n+m)$都是偶数。总之x为奇数，y为偶数，z为奇数。

这样我们推得了方程$x^2+y^2=z^2$在x，y，z互质，x为奇数时，所有没有重复的正整数解的通式：

$$\begin{cases} x=mn \\ y=\dfrac{n^2-m^2}{2} & (m,\ n\text{为互质正奇数，且}m<n) \\ z=\dfrac{n^2+m^2}{2} \end{cases}$$

下面是m，n取较小值的几组解：

m	n	x	y	z
1	3	3	4	5
1	5	5	12	13
1	7	7	24	25
…				
3	5	15	8	17
3	7	21	20	29
…				
5	7	35	12	37
…				

对于x，y，z不是互质的解。如前所述，可通过包含在前列通式中的各组解去乘以一个任意的非1正整数K而获得。

注意，通解中的x，y是可以互换的。前面我们设定x为奇数，实际上也可以x为偶数，y为奇数。

此外，不定方程$x^2+y^2=z^2$的通解，表示形式是多种多样的。例如在上面的解中，我们设：

$$\begin{cases} n+m=2a \\ n-m=2b \end{cases}$$ (a,b为一奇一偶的互质正整数，且$a>b$)

即 $$\begin{cases} n=a+b \\ m=a-b \end{cases}$$

代入前面的通解，就得到了另一形式的通解式。

$$\begin{cases} x=a^2-b^2 \\ y=2ab \\ z=a^2+b^2 \end{cases}$$ (a,b为一奇一偶的互质正整数且 $a>b$)

下面是勾股定理的推广，当n为自然数时有：

$$\underbrace{(2n^2+n)^2+(2n^2+n+1)^2+\cdots+(2n^2+2n)^2}_{(n+1)\text{项}}$$

$$=\underbrace{(2n^2+2n+1)^2+(2n^2+2n+2)^2+\cdots+(2n^2+3n)^2}_{n\text{项}}$$

证明，按平方差公式：

$$(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+n+1)^2=n(4n^2+3n+2)$$

$$(2n^2+2n+2)^2-(2n^2+n+2)^2=n(4n^2+3n+4)$$

$$(2n^2+2n+3)^2-(2n^2+n+3)^2=n(4n^2+3n+6)$$

…

$$(2n^2+3n)^2-(2n^2+2n)^2=n(4n^2+3n+2n)$$

二边分别相加得

$$(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+n+1)^2-(2n^2+2n+2)^2$$

$$-(2n^2+n+2)^2+\cdots+(2n^2+3n)^2-(2n^2+n)^2$$

$$=n(4n^2\cdot n+3n\cdot n+2\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n)$$

$$=n(4n^3+4n^2+n)$$

$= (2n^2+n)^2$

于是$(2n^2+2n+1)^2+(2n^2+2n+2)^2+\cdots+(2n^2+3n)^2$

$$=(2n^2+n)^2+(2n^2+n+1)^2+\cdots+(2n^2+2n)^2$$

即原式成立。

练　　习

(46)已知$x=105$求适合方程$x^2+y^2=z^2$的所有正整数解。

(47)找出满足方程$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2$的一组正整数解。

(48)求一组正整数，满足方程

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_5^2+x_6^2+x_7^2$$

十、奇偶分析法与约倍数分析法

从无零整勾股的研究，可以启发这样的二个方法，就是利用奇偶数的分析和约倍数的分析来解一些不太复杂的二次不定方程。在解题过程中，需要灵活和机智，根据已知的不定方程，具体情况具体分析。

例27　求不定方程　$2(x+y)=xy+7$的整数解。

解：求出x，并分离其整数部分。得

$$x=2-\frac{3}{y-2}$$

可知$(y-2)$为3的约数，否则x就不是整数了。

由　$y-2=\pm1,\pm3$得x，y的四组整数解为：

$(-1,3)$　$(5,1)$　$(1,5)$，$(3,-1)$

例28　求不定方程$3x^2+7xy-2x-5y-35=0$的正整数解。

解：原方程中y的指数为一次，求得

$$y=\frac{-3x^2+2x+35}{7x-5} \tag{1}$$

运用除法，分离其整数部分。

$$y = -\frac{3}{7}x - \frac{1}{49} + \frac{34\frac{44}{49}}{7x-5}$$

二边乘以49。得

$$49y = -21x - 1 + \frac{1710}{7x-5}$$

据此$(7x-5)$必为1710之一因数。

又据(1)式，由于$x \geqslant 1$，$y \geqslant 1$，

所以 $7x-5>0$， $\frac{-3x^2+2x+35}{7x-5} \geqslant 1$

去分母，解不等式得

$1 \leqslant x \leqslant 2$

即 $x=1,2$，对应地 $7x-5=2$或9，是为1710的因数。

所以有二组正整数解为(1,17) (2,3)

例29 能否有正整数m,n满足方程

$$m^2+1954=n^2$$

解：将原式化成

$$(n-m)(n+m)=1954$$

当m,n是一奇一偶的正整数时，$(n-m)$与$(n+m)$同为奇数。

当m，n是同奇或同偶的正整数时，$(n-m)$与$(n+m)$同为偶数。

仅此二种情况。因1954为偶数，故如有正整数m，n满足原方程，则$(n-m)$与$(n+m)$必同偶，也就是$(n-m)(n+m)$

有因数4。但$1954=2\times977$无因数4，于是矛盾。所以没有正整数能满足方程$m^2+1954=n^2$。

例30　有二个二位数，它们的差是56，它们的平方数的末二位数字相同，求此二位数。（河南省1978年数学竞赛题）

解：设此二数分别为x，y。

$$\begin{cases} x-y=56 & (1) \\ x^2-y^2=100n \quad (n\text{为正整数}) & (2) \end{cases}$$

(2)÷(1)得　$x+y=\dfrac{25n}{14}$　(3)

由(1)(3)二式解出

$$x=\frac{25n}{28}+28,\qquad y=\frac{25n}{28}-28$$

可知n为28的倍数。

按　$10\leqslant x\leqslant 99$，　$10\leqslant y\leqslant 99$，

解得　$43\leqslant n\leqslant 79$

因此仅当$n=56$时，有一组正整数解(78，22)。

所求二数分别是78和22。

例31　某数是一个完全平方数，末尾二位数字均不为零，当去掉此二位数字时，留下的数仍是一个完全平方数。求这样的数中最大的一个。（苏联1964年数学竞赛题）

解：设此数为x^2，末尾二位数字所组成的数为y，当去掉此二位数字时，留下的数为z^2。（x，y，z都是正整数）

则　$x^2=100z^2+y$

则　$(x-10z)(x+10z)=y$　(1)

设$x-10z=a$，$x+10z=b$（a,b是正整数，且$a<b$）

于是可解得：

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} & (2) \\ y = ab & (3) \\ z = \dfrac{b-a}{20} & (4) \end{cases}$$

从（4）式分析，要求这类数中最大的一个，z就要尽可能大，也就是$b-a$要尽可能大。

从（3）式分析，y是二位数，b最大不超过99，a最小不小于1，所以$b-a<99$，故z最大为4。

以$z=4$代入（4）式，得

$$b=80+a$$

再代入（2）式，得

$$y=a(80+a)$$

但$y<100$，因此只能是$a=1$，得

$$b=81,\ y=81,\ x=41,\ z=4$$

所求的最大数为1681。

例32 有些二位数，其数值正好是二数字乘积的倍数，求出所有这些二位数。

解：设二位数为ab，则

$$10a+b=abN \qquad (1)$$

（a，b，N为正整数，$1\leqslant a\leqslant 9$，$1\leqslant b\leqslant 9$）

本题a，b不能为零是显然的，否则乘积为零就无意义了。

$$(1)\div a\text{得}\ 10+\frac{b}{a}=bN \qquad (2)$$

$(1) \div b$得$\frac{10a}{b} + 1 = aN$ （3）

从(2)(3)式可知$\frac{b}{a}$，$\frac{10a}{b}$都是整数，也就是b是a的倍数，同时又是$10a$的约数。因此b可能为a，$2a$，$5a$。

当$b = a$时，从(3)式得$aN = 11$。

a为11的约数，只能是$a = b = 1$。

当$b = 2a$时，因$b \leqslant 9$，故$a \leqslant 4$，从(3)式得$aN = 6$。

a为b的约数，$a = 1$，2，3，$b = 2$，4，6。

当$b = 5a$时，同理a只能为1。

总之，所有这样的二位数有5个，为11，12，15，24，36。

例33　求$x^2 + y^2 = 656$的正整数解。

解：首先$x \neq y$，因为656的一半是328不是完全平方数。

设$x > y$，由于656是偶数，x，y必同奇偶。

所以$x \pm y$必是偶数。

设$u_1 = \frac{x+y}{2}$，$v_1 = \frac{x-y}{2}$（u_1，v_1是正整数，$u_1 > v_1$）

则$x = u_1 + v_1$，$y = u_1 - v_1$。代入原方程得：

$$u_1^2 + v_1^2 = 328$$

而328仍为偶数，按上法办理。

设$u_1 = u_2 + v_2$，$v_1 = u_2 - v_2$（u_2，v_2为正整数，$u_2 > v_2$）

得　$$u_2^2 + v_2^2 = 164$$

164仍为偶数，再按前法设置。得

$$u_3^2+v_3^2=82\ (u_3,\ v_3\text{为正整数},\ u_3>v_3)$$

注：此法的设置为$u_n=u_{n+1}+v_{n+1}$，$v_n=u_{n+1}-v_{n+1}$

82还是偶数，“如法炮制”得

$$u_4^2+v_4^2=41\ (u_4,\ v_4\text{为正整数},\ u_4>v_4)$$

41为奇数，u_4，v_4必为一奇一偶。今以小于或等于$[\sqrt{41}]$的偶数平方去试：

$$41-2^2=37,\ 41-4^2=25=5^2,$$

$$41-6^2=5$$

可见$u_4=5$，$v_4=4$，满足方程$u_4^2+v_4^2=41$

将此结果倒推上去：

$$u_3=5+4=9 \qquad v_3=5-4=1$$

$$u_2=9+1=10 \qquad v_2=9-1=8$$

$$u_1=10+8=18 \qquad v_1=10-8=2$$

$$x=18+2=20 \qquad y=18-2=16$$

由于先前 $x>y$ 是假设，所以原题有二组正整数解为

$$(20,\ 16)(16,\ 20)$$

例34　求满足$x^2+y^2=44^2\times10^2\times33^2+33^2\times5^2+5^2\times44^2$，且$x>y$的正整数对（$x$，$y$）中的任何二对。（美国纽约1977年数学竞赛题）

解：将原式右边变换成平方和的形式。

右边$=(44^2\times10^2\times33^2-2\times44\times10\times33\times33\times5+33^2\times5^2)+(2\times44\times10\times33\times33\times5+5^2\times44^2)$

$$=(44\times10\times33-33\times5)^2+(44^2\times5^2\times3\times33+5^2\times44^2)$$

$$=33^2\times5^2\times(88-1)^2+44^2\times5^2\times(99+1)$$

$= 14355^2 + 2200^2$

所以(14355，2200)为满足方程的一组正整数对。

又右边 $= 44^2 \times (8^2 + 6^2) \times 33^2 + 33^2 \times 5^2 + 5^2 \times 44^2$

$= (44^2 \times 8^2 \times 33^2 + 33^2 \times 5^2) + (44^2 \times 6^2 \times 33^2 + 5^2 \times 44^2)$

$= (44^2 \times 8^2 \times 33^2 - 2 \times 44 \times 8 \times 33^2 \times 5 + 33^2 \times 5^2) + (44^2 \times 6^2 \times 33^2 + 2 \times 44 \times 8 \times 33^2 \times 5 + 5^2 \times 44^2)$

$= (44 \times 8 \times 33 - 33 \times 5)^2 + (44^2 \times 6^2 \times 33^2 + 2 \times 44 \times 6 \times 44 \times 33 \times 5 + 5^2 \times 44^2)$

$= (44 \times 8 \times 33 - 33 \times 5)^2 + (44 \times 6 \times 33 + 5 \times 44)^2$

$= 11451^2 + 8932^2$

所以(11451，8932)为满足方程的又一正整数对。

你能再算出一组满足此题所给方程的正整数对吗？

例35　求$x^2 + 2y^2 = z^2$正整数解的通式。其中x，y，z两两互质。

解：将原式变换成

$$2y^2 = (z - x)(z + x)$$

与例29相同，$(z - x)$与$(z + x)$必同为偶数，因此$2y^2$有因数4，也就是y^2为偶数，故y为偶数。

此外$(z - x)$与$(z + x)$没有大于2的公约数，否则，若除2外还有大于1的公约数K，

设$z - x = 2aK$，$z + x = 2bK$（a，b，K都是正整数）

则　　$z = K(a + b)$，$x = K(b - a)$

显然，与题意x，y，z两两互质相矛盾。

所以$(z-x)$与$(z+x)$的最大公约数是2。也就是说在$(z-x)$与$(z+x)$中必有一个其因数中只有一个2。

设$(z-x)$的因数中只有一个2。

则 $\frac{z-x}{2}$与$(z+x)$互质，它们间没有公因数。

因 $y^2=\frac{z-x}{2}\cdot(z+x)$，所以$\frac{z-x}{2}$与$(z+x)$ 分别为二个完全平方数。

于是可设$\frac{z-x}{2}=n^2$，$z+x=(2m)^2$（m，n是正整数，n为奇数）

这里$2m^2>n^2$。解得：

$$\begin{cases} x=2m^2-n^2 \\ y=2mn \\ z=2m^2+n^2 \end{cases}$$

若是$(z+x)$的因数中只有一个2，则

设 $z-x=(2m)^2$，$\frac{z+x}{2}=n^2$（m，n是正整数，n为奇数）

得到 $x=n^2-2m^2$，这里$n^2>2m^2$。

所以不定方程 $x^2+2y^2=z^2$ 互质正整数解的通式是：

$$\begin{cases} x=|2m^2-n^2| \\ y=2mn \\ z=2m^2+n^2 \end{cases} \quad （m，n\text{是正整数，}n\text{为奇数}）$$

例36　方程$x^3+y^3=1072$有没有正整数解？

这虽然是一个三次不定方程，经过分析还是可解决的。

解：左边因式分解$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$　（1）

　　右边质因数分解$1072=2\times2\times2\times2\times67$　（2）

显然x，y中没有一个是1。若有一个为1，则另一个的立方是1071。这不可能，因$1071=7\times9\times17$不是完全立方数。

由$x\geqslant2$，$y\geqslant2$

得　$\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\leqslant1$

即　$xy\geqslant x+y$

按算术平均数大于或等于几何平均数，有

$$x^2+y^2\geqslant2xy$$

故　$x^2-xy+y^2\geqslant2xy-xy=xy\geqslant x+y$　（3）

从（2）式可见，因数$(x+y)$最大不超过16，才合于（3）式。

又x，y若有正整数解，则有

$$(x+y)^2>(x^2-xy+y^2)$$

从（2）式可知，因数$(x+y)$最小为16。唯有这样其平方才大于剩下的因数67。

综合起来只能是：

$$x+y=16$$

原方程若有正整数解，必定是

$$\begin{cases}x+y=16\\x^2-xy+y^2=67\end{cases}$$

得二组解(9，7)，(7，9)即是原不定方程的正整数解。

例37 求方程组的整数解。

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x^3+y^3+z^3=-18 & (2) \end{cases}$$

(1978年全国部分省市数学竞赛题)

解：由(1)式得$z=-(x+y)$

代入(2)式得$x^3+y^3-(x+y)^3=-18$

化简 $\quad -xy(x+y)=-6$

即 $\quad xyz=-6 \qquad (3)$

也可由$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=0$ 　　得到(3)式

从(3)式可见x，y，z必须是6的约数，且满足(1)，(2)二式。其中只有一个是负数，且这负数的绝对值应该最大。

如令$x=-3$，则

$$\begin{cases} y=1,\ 2 \\ z=2,\ 1 \end{cases}$$

原题为x，y，z的轮换对称式，轮换x，y，z的值共得六组整数解为：

$(-3，1，2)$，$(-3，2，1)$，$(1，-3，2)$，$(2，-3，1)$，$(1，2，-3)$，$(2，1，-3)$

练　　习

(49) 求方程$x^2-14xy+75=0$的正整数解。

(50) 求 $y-\frac{x+3y}{x+2}=1$的正整数解。

(51) 求$5x^2+5xy+3xz=51$的正整数解。

(52) 求$x^2-y^2=23$的正整数解。

(53) 证明 $x^2-y^2=A$，当A为大于1的奇数时，至少有一组正整数解。

(54) m取什么正整数时$(m-2)x-8=0$的解是整数？

(55) 求方程$x^2-y^2=63$的所有正整数解。

(56) 求满足$m^2+1980=n^2$的正整数m和n。

(57) 有没有自然数对$(x,\ y)$满足$x^2+y^2=170$？

(58) 求方程$x^2-3xy+2y^2=3$的正整数解。

(59) 求方程$x^2+y=y^2+x-18$的正整数解。

(60) 求$x^3-y^3=37$的正整数解。

(61) 求方程组 $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x^2+y^2-z^2=14 \end{cases}$ 的整数解。

(62) 求方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=-36 \end{cases}$ 的整数解。

(63) 解方程（求x，y，z）$\overline{xyz}\cdot\overline{zyx}=\overline{xzyyx}$

其中$\overline{xyz}$和$\overline{zyx}$是三位正整数，$\overline{xzyyx}$是五位正整数。

（广东省1978年数学竞赛题）

(64)有二个正整数，和是667，最小公倍数被最大公约数来除，所得的商等于120，求这二个数。

(65)第四世纪，有个希腊数学家（Diophautus）。在他所著的算术书中，有一道这样的问题：x^2-60为一完全平方数，求x。你能不能解答？

十一、循环连分数

在第三节中曾经叙述了把正有理数$\frac{a}{b}$化成有限连分数的方法，并应用于解二元一次不定方程。现在我们来讲述把无理数$\sqrt{A}$（A是非完全平方的正整数）化连分数的方法。

先从$\sqrt{A}$中分离出整数部分。

设$[\sqrt{A}]=a_1$，其中$[\sqrt{A}]$表示$\sqrt{A}$的整数部分

于是$\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{K_1}$　$(K_1>1)$

其次求出$[K_1]$，即将K_1的整数部分分离。

设$[K_1]=a_2$，$K_1=a_2+\frac{1}{K_2}$$(K_2>1)$

然后按此方法继续下去，不断分离K的整数部分。

设$[K_2]=a_3, K_2=a_3+\frac{1}{K_3}$ $(K_3>1)$

……

$$\text{于是}\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{K_1}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{K_2}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}$$

即 $\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$

由于$\sqrt{A}$是无理数，这个过程就永无止境。因此与有理数不同，我们得到的是无限连分数。

这里叙述的方法，也适用于能分离出整数部分的其他无理数化连分数。一般地实数总可通过这个方法化成连分数。

例38　将$\sqrt{2}$化成连分数。

解：显然$\sqrt{2}$的整数部分为1。即

$$a_1=[\sqrt{2}]=1$$

设$\sqrt{2}=1+\frac{1}{K_1}$（$K_1>1$）则 $K_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

再求出K_1的整数部分：

$$a_2=[\sqrt{2}+1]=2$$

设$K_1=2+\frac{1}{K_2}$（$K_2>1$）即$\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{K_2}$

则　$K_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

我们发现$K_2=K_1$，以此推论下去得

$$K_1=K_2=K_3=\cdots$$

$$a_2=a_3=a_4=\cdots$$

所以$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$

例39 将$\sqrt{28}$化成无限连分数。

解：$\sqrt{28}=5+\frac{1}{K_1}$ （$K_1>1$） 这里$a_1=[\sqrt{28}]=5$

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{28}-5}=\frac{\sqrt{28}+5}{3}=3+\frac{1}{K_2}(K_2>1)$$

这里 $a_2=[K_1]=\left[\frac{\sqrt{28}-5}{3}\right]=\left[\frac{5+5}{3}\right]=3$

$$K_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{28}+5}{3}-3}=\frac{3}{\sqrt{28}-4}=\frac{\sqrt{28}+4}{4}=2+\frac{1}{K_3}$$

（$K_3>1$）

这里$a_3=[K_2]=\left[\frac{\sqrt{28}+4}{4}\right]=\left[\frac{5+4}{4}\right]=2$

$$K_3=\frac{1}{\frac{\sqrt{28}+4}{4}-2}=\frac{4}{\sqrt{28}-4}=\frac{\sqrt{28}+4}{3}=3+\frac{1}{K_4}$$

（$K_4>1$）

这里$a_4=[K_3]=\left[\frac{\sqrt{28}+4}{3}\right]=3$

$$K_4=\frac{3}{\sqrt{28}-5}=\sqrt{28}+5=10+\frac{1}{K_5}\quad(K_5>1)$$

这里$a_5=[K_4]=[\sqrt{28}+5]=10$

$$K_5=\frac{1}{\sqrt{28}-5}=K_1$$

$a_6=[K_5]=[K_1]=a_2$

因此从K_5,（a_6）开始又重复前面的一系列结果，成为循

环连分数。

所以$\sqrt{28}=5+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$
$+\cdots$

我们把$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$叫做循环连分数的循环节，为了简便，我们用括号将循环节括起来，表示无限循环。

$$\sqrt{28}=5+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)$$

前面的$\sqrt{2}$化连分数，也是循环连分数。可以写成

$$\sqrt{2}=1+\left(\frac{1}{2}\right)$$

只是它的循环节只有1项，而$\sqrt{28}$的循环节有4项。

一般$\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$ 是从a_2开始循环的连分数（见后定理五），顺次将连分数截段得各渐近分数如下：

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_1}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=a_1+\frac{1}{a_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}$$

$\cdots$

$$\frac{p_n}{q_n}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\ (n\text{为自然数})$$

如$\sqrt{2}$的前5个近数是：

$\frac{p_1}{q_1}=1$，$\frac{p_2}{q_2}=\frac{3}{2}$，$\frac{p_3}{q_3}=\frac{7}{5}$，$\frac{p_4}{q_4}=\frac{17}{12}$，$\frac{p_5}{q_5}=\frac{41}{29}$。

从构成连分数的方法有：

$a_1<\sqrt{A}$　故 $\frac{p_1}{q_1}<\sqrt{A}$。

$a_2<K_1$　那末 $\frac{1}{a_2}>\frac{1}{K_1}$　$a_1+\frac{1}{a_2}>a_1+\frac{1}{K_1}=\sqrt{A}$

$$\frac{p_2}{q_2}>\sqrt{A}。$$

$a_3<K_2$　同上得 $a_2+\frac{1}{a_3}>a_2+\frac{1}{K_2}=K_1$　$\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}<\frac{1}{K_1}$

即 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}<a_1+\frac{1}{K_1}=\sqrt{A}$　故 $\frac{p_3}{q_3}<\sqrt{A}$

$a_4<K_3$　同上得 $a_3+\frac{1}{a_4}>K_2$，$a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}<K_1$

即 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4}>a_1+\frac{1}{K_1}=\sqrt{A}$　故 $\frac{p_4}{q_4}<\sqrt{A}$

$a_5<K_4$ 类推得　$a_4+\frac{1}{a_5}>K_3$，　$a_3+\frac{1}{a_4+}\frac{1}{a_5}<K_2$

$a_2+\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\frac{1}{a_5}>K_1$，$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\frac{1}{a_5}<\sqrt{A}$

故$\frac{p_5}{q_5}<\sqrt{A}$

依次递推下去，$\frac{p_6}{q_6}>\sqrt{A}$，$\frac{p_7}{q_7}<\sqrt{A}\cdots$

所以根据连分数的构成，“奇数番号”的第一，三，五，…近数都小于$\sqrt{A}$，而“偶数番号”的第二，四，六，…近数都大于$\sqrt{A}$。写成定理形式为：

定理三 实数α展成连分数

$\alpha=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+\cdots+}\frac{1}{a_N}$（$N$为自然数，当$N$无穷大时为无限连分数。）

设δ_1，δ_2，…δ_N依次为它的各个渐近分数。则

$\delta_{2n-1}\leqslant\alpha\leqslant\delta_{2n}$（$n$为自然数，且$2n-1$和$2n$均小于或等于$N$）

等号仅当α为有理数（有限连分数），且$2n-1=N$或$2n=N$时成立。

前面第三节介绍的关于连分数的二条定理，对于无限连分数也是成立的。因为我们在证明时并没有涉及到连分数是有限的还是无限的，而是就一般情况推证的，所以把连分数改为无限连分数，第三节所叙述的定理一和定理二依然成立。

由定理二有　$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$

以$q_{n-1}q_n$除上式的两边，得

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$$

即 $|\delta_n-\delta_{n-1}|=\dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$

从定理一可知q_n是随着n的增大而增大，再根据定理三就有：

$$|\alpha-\delta_n|<|\delta_{n+1}-\delta_n|=\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}$$

这里给出了实数α的近似值δ_n，它的误差小于$\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$，

有时为了简便，也用$\dfrac{1}{q_n^2}$来估计误差，就是不够精确。随着n

的增大，δ_n越来越接近于α，误差越来越小，所以称δ_n为α的渐近分数。简称近数。

将以上的推理归纳成定理形式。得

定理四 实数α展成连分数$a_1+\dfrac{1}{a_2+}\dfrac{1}{a_3+\cdots+}\dfrac{1}{a_N}$（$N$为自然数。当$N$无穷大时，为无限连分数）

设$\delta_n=\dfrac{p_n}{q_n}$为它的第$n$个渐近分数（$n$为自然数$n<N$）

则 $|\alpha-\delta_n|\leqslant\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}<\dfrac{1}{q_n^2}$

等号仅当α为有理数（有限连分数），且$n+1=N$时成立。

利用这一定理，可以计算实数α的近似值，并估计误差范围，如π和$\sqrt{2}$的近似值。

在第三节中我们已知π的第一，二，三，四近数是

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113}。$$

其中第二近数$\frac{22}{7}$与π 的误差小于$\frac{1}{7\times106}\approx0.00135$ 接近千分之一。

第四近数$\frac{355}{113}$与π 的误差小于$\frac{1}{113\times(292\times113+106)}$ $<\frac{3}{10^7}$,即误差小于百万分之一。

这二个分数早为我国古代著名数学家祖冲之(公元429—500年)所发现,比欧洲人要早一千多年。

祖冲之把$\frac{22}{7}$作为π 的约率,把$\frac{355}{113}$作为π的密率。

如果你有兴趣,可以根据下列π 的连分数计算π 的近似值。

$$\pi=3+\frac{1}{7}\,+\frac{1}{15}\,+\frac{1}{292}\,+\frac{1}{1}\,+\frac{1}{1}\,+\frac{1}{1}\,+\frac{1}{21}\,+\frac{1}{31}\,+\frac{1}{14}\,+\frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{1}\,+\frac{1}{2}\,+\cdots$$

又如$\sqrt{2}$,它的开始五个近数是

$$1;\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{17}{12};\ \frac{41}{29}\ (又q_6=2\times29+12=70)$$

其中第五近数与$\sqrt{2}$的误差小于$\frac{1}{29\times70}<0.0005$,即误差小于万分之五,故可将$\frac{41}{29}$作为$\sqrt{2}$的近似值。要更精确些

可取第六近数$\frac{99}{70}$（误差小于万分之一）

下面我们来证明前面曾提及过的关于循环连分数的另外二条定理。

定理五 将$\sqrt{A}$化成无限连分数（A是非完全平方的正整数）。

设$\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{K_1}$，　$(K_1>1)$，　$a_1=[\sqrt{A}]$

$K_1=a_2+\frac{1}{K_2}$，　$(K_2>1)$，　$a_2=[K_1]$

$K_2=a_3+\frac{1}{K_3}$，　$(K_3>1)$，　$a_3=[K_2]$

…

$K_n=a_{n+1}+\frac{1}{K_{n+1}}$，$(K_{n+1}>1)$，$a_{n+1}=[K_n]$（$n$是自然数）

那末K_n总是具有下列形式：

$$K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}。$$

b_n和c_n都是正整数，且$b_n<\sqrt{A}$，$c_n<\sqrt{A}+b_n$。

证明：用数学归纳法。

1° $n=1$，$K_1=\frac{1}{\sqrt{A}-a_1}=\frac{\sqrt{A}+a_1}{A-a_1^2}$

这里$b_1=a_1$　$c_1=A-a_1^2$

从$\sqrt{A}>[\sqrt{A}]=a_1>0$，可知$b_1$是正整数，且$b_1<\sqrt{A}$。

同时$A-a_1^2>0$，知c_1也是正整数。

又从$K_1>1$得$A-a_1^2<\sqrt{A}+a_1$即$c_1<\sqrt{A}-b_1$。

所以有$K_1=\dfrac{\sqrt{A}+b_1}{c_1}$，$b_1$和$c_1$是正整数，$b_1<\sqrt{A}$，$c_1<\sqrt{A}+b_1$

2° 设$n\leqslant m$时，$K_n=\dfrac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}$均已成立

b_n和c_n是正整数，且$b_n<\sqrt{A}$，$c_n<\sqrt{A}+b_n$

当$n=m+1$时，

由于 $K_m=\dfrac{\sqrt{A}+b_m}{c_m}=a_{m+1}+\dfrac{1}{K_{m+1}}$

得 $K_{m+1}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{A}+b_m}{c_m}-a_{m+1}}=\dfrac{\sqrt{A}+(a_{m+1}c_m-b_m)}{\dfrac{A-(a_{m+1}c_m-b_m)^2}{c_m}}$

这里$b_{m+1}=a_{m+1}c_m-b_m$ (1)

$$c_{m+1}=\frac{A-(a_{m+1}c_m-b_m)^2}{c_m}=\frac{A-b_{m+1}^2}{c_m} \qquad (2)$$

先证明b_{m+1}和c_{m+1}都是整数。

从(1)式，显见b_{m+1}为整数。

从(2)式得：

$$A=b_{m+1}^2+c_mc_{m+1}=(a_{m+1}c_m-b_m)^2+c_mc_{m+1} \qquad (3)$$

以$(m-1)$代替m同样可得

$$A=b_m^2+c_{m-1}c_m \qquad (4)$$

与(3)式连等起来消去A。

$$b_m^2+c_{m-1}c_m=a_{m+1}^2c_m^2-2a_{m+1}b_mc_m+b_m^2+c_mc_{m+1}$$

二边除以c_m，得

$$c_{m-1}=a_{m+1}^2c_m-2a_{m+1}b_m+c_{m+1}$$

即 $c_{m+1}=c_{m-1}-a_{m+1}^2c_m+2a_{m+1}b_m$

可知c_{m+1}也是整数。

接着证明b_{m+1}和c_{m+1}都大于零。

由于 $a_{m+1}=[K_m]$ $K_m-a_{m+1}>0$

即 $\frac{\sqrt{A}+b_m}{c_m}-a_{m+1}>0$

去分母 $\sqrt{A}+b_m-a_{m+1}c_m>0$ (5)

从(4)式得 $A=b_m^2+c_{m-1}c_m>b_m^2$

即 $\sqrt{A}>b_m$ (6)

又推得 $\sqrt{A}-b_m>0$ ，$\sqrt{A}-b_m+a_{m+1}c_m>0$ (7)

将(5)式乘以(7)式，得

$$A-(a_{m+1}c_m-b_m)^2>0$$

代入(2)式。因$c_m>0$，可知$c_{m+1}>0$

又从(1)式分析，若$b_{m+1}\leqslant 0$，即

$$a_{m+1}c_m-b_m\leqslant 0$$

于是推出 $c_m\leqslant a_{m+1}c_m\leqslant b_m<\sqrt{A}$ (见(6)式)

得 $a_{m+1}=\left[\frac{\sqrt{A}+b_m}{c_m}\right]>\left[\frac{a_{m+1}c_m+c_m}{c_m}\right]=a_{m+1}+1$ 矛盾！

所以 $b_{m+1}>0$

至此 $K_{m+1}=\frac{\sqrt{A}+b_{m+1}}{c_{m+1}}$ 成立。(b_{m+1}和c_{m+1}是正整数)

又从(3)式得

$$A=b_{m+1}^2+c_mc_{m+1}>b_{m+1}^2\ ,\quad b_{m+1}<\sqrt{A},$$

从$K_{m+1}>1$可得 $c_{m+1}<\sqrt{A}+b_{m+1}$ 。

综上所证有 $K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}$ 且b_n和c_n都是正整数，

$b_n<\sqrt{A}$ $c_n<\sqrt{A}+b_n$ 。定理证毕。

从上面的证明中，我们得到了一个关于b_n和c_n的递推公式（见(1)(2)二式）。即有：

推论：在 $K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}$中，有

$$b_n=a_nc_{n-1}-b_{n-1}$$

$$c_n=\frac{A-(a_nc_{n-1}-b_{n-1})^2}{c_{n-1}}=\frac{A-b_n^2}{c_{n-1}}$$

定理六 将$\sqrt{A}$化连分数（A是非完全平方的正整数）

$$\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{a_2}\,\frac{1}{+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

则必为循环连分数，且从第二项a_2开始循环。

证明：将$\sqrt{A}$化连分数。

设$\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{K_1}$ （$K_1>1$），$a_1=[\sqrt{A}]$。

$$K_1=\frac{\sqrt{A}+b_1}{c_1}=a_2+\frac{1}{K_2}\quad(K_2>1),\ a_2=[K_1]$$

…

$$K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}=a_{n+1}+\frac{1}{K_{n+1}}\quad(K_{n+1}>1),$$

$$a_{n+1}=[K_n]。$$

…

从定理(5)知b_n,c_n为正整数，且

$$b_n<\sqrt{A},\ c_n<\sqrt{A}+b_n<2\sqrt{A}$$

故b_n与c_n的可取值有限。

而 $$K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}$$

K_n的数值是由正整数对（b_n；c_n） 决定的。（$\sqrt{A}$是常数）

由于$b_n<\sqrt{A}$，$c_n<2\sqrt{A}$所以它们搭配成的正整数对的组合数也是有限的，不会超过$\sqrt{A}\cdot2\sqrt{A}=2A$。故（$b_n$，$c_n$）的组合取不到$2A$次就必然重复。

若有(b_{m+s}，c_{m+s}）与(b_m，c_m)完全相同。则有

$$K_{m+s}=K_m$$

于是出现循环。据

$$a_{n+1}=[K_n]$$

推得 $a_{m+s+1}=a_{m+1}$， $a_{m+s+2}=a_{m+2}$…

循环从a_{m+1}开始，s是循环节的项数。下面证明循环从第二项a_2开始。

从定理(5) $\sqrt{A}-b_n>0$，$c_n>0$，可知$\frac{\sqrt{A}-b_n}{c_n}>0$。

又按定理（5）的推论，得

$$\frac{\sqrt{A}-b_n}{c_n}=\frac{A-b_n^2}{c_n(\sqrt{A}+b_n)}$$

$$=\frac{c_{n-1}c_n}{c_n(\sqrt{A}+a_nc_{n-1}-b_{n-1})}$$

$$=\frac{c_{n-1}}{\sqrt{A}+a_nc_{n-1}-b_{n-1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{A}-b_{n-1}}{c_{n-1}}+a_n}<1$$

（注：按定理(5) $\frac{\sqrt{A}-b_{n-1}}{c_{n-1}}>0$，$a_n=[K_{n-1}]\geqslant 1$）

因此 $0<\frac{\sqrt{A}-b_n}{c_n}<1$

仍按定理(5)的推论。

$$\frac{\sqrt{A}-b_n}{c_n}+a_{n+1}=\frac{\sqrt{A}+a_{n+1}c_n-b_n}{c_n}$$

$$=\frac{\sqrt{A}+b_{n+1}}{c_n}=\frac{A-b^2_{n+1}}{c_n(\sqrt{A}-b_{n+1})}$$

$$=\frac{c_nc_{n+1}}{c_n(\sqrt{A}-b_{n+1})}=\frac{c_{n+1}}{\sqrt{A}-b_{n+1}}$$

此式左边 $0<\frac{\sqrt{A}-b_n}{c_n}<1$，$a_{n+1}$是正整数。

所以 $a_{n+1}=\left[\frac{c_{n+1}}{\sqrt{A}-b_{n+1}}\right]$ （n是自然数）

这是一个逆推的公式。

如果循环不是从第二项a_2开始。

若（b_{m+s}，c_{m+s}）与（b_m，c_m）完全相同，$K_{m+s}=K_m$ 则

$$a_{m+s+1}=a_{m+1},\quad a_{m+s+2}=a_{m+2}\cdots$$

循环从a_{m+1}开始，a_{m+1}是循环节的首项，a_{m+s+1}是第二循环节的首项。那末按前面的逆推公式，从（b_{m+s}，c_{m+s}）与（b_m，c_m）相同．可以推得$a_{m+s}=a_m$。因此循环不是从a_{m+1}开始，而是从前一项a_m开始。同理，从此又可推得循环是从a_m的前一项a_{m-1}开始。继续逆推下去，得循环从a_{m-2}开始…

但前面的逆推公式中，n是自然数，从1开始，故循环必从a_2开始。

总之$\sqrt{A}$化成的必是循环连分数，循环从第二项a_2开始。

至此，定理证毕。

推论：$\sqrt{A}$展成连分数

设$\sqrt{A}=a_1+\dfrac{1}{K_1}$ （$K_1>1$），$a_1=[\sqrt{A}]$。

$$K_1=\frac{\sqrt{A}+b_1}{c_1}=a_2+\frac{1}{K_2}\quad (K_2>1),a_2=[K_1]。$$

…

$$K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{c_n}=a_{n+1}+\frac{1}{K_{n+1}}\quad (K_{n+1}>1),$$

$$a_{n+1}=[K_n]。$$

…

则有 $a_{n+1}=\left[\dfrac{c_{n+1}}{\sqrt{A}-b_{n+1}}\right]$

例40　将 $\sqrt{m^2+1}$ 展开成无限连分数。（m 是正整数）

解：设　$\sqrt{m^2+1}=a_1+\dfrac{1}{K_1}$ 这里 $a_1=[\sqrt{m^2+1}]=m$，$K_1>1$。

于是 $K_1=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}=\dfrac{\sqrt{m^2+1}+m}{(\sqrt{m^2+1})^2-m^2}$

$$=\sqrt{m^2+1}+m\text{。}$$

设　$K_1=a_2+\dfrac{1}{K_2}$　这里 $a_2=[K_1]=2m$，$K_2>1$。

得　$K_2=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}+m-2m}=K_1$，

开始循环，循环节的项数为1项。

设 $K_2=a_3+\dfrac{1}{K_3}$，$a_3=[K_2]=[K_1]=a_2$，$K_3>1$。

继续下去，有 $a_2=a_3=a_4=\cdots$

所以 $\sqrt{m^2+1}=m+\left(\dfrac{1}{2m}\right)$

例41　将 $\sqrt{103}$ 化成连分数。

解　$\sqrt{103}=10+\dfrac{1}{K_1}$。

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{103}-10}=\frac{\sqrt{103}+10}{3}=6+\frac{1}{K_2},$$

这里 $\left[\dfrac{\sqrt{103}+10}{3}\right]=\left[\dfrac{10+10}{3}\right]=6$。

$$K_2=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{103}+10}{3}-6}=\frac{3}{\sqrt{103}-8}=\frac{\sqrt{103}+8}{13}$$

$$=1+\frac{1}{K_3}。$$

这里 $\left[\dfrac{\sqrt{103}+8}{13}\right]=\left[\dfrac{10+8}{13}\right]=1$。

$$K_3=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{103}+8}{13}-1}=\frac{13}{\sqrt{103}-5}$$

$$=\frac{\sqrt{103}+5}{6}=2+\frac{1}{K_4}$$

$$K_4=\frac{6}{\sqrt{103}-7}=\frac{\sqrt{103}+7}{9}=1+\frac{1}{K_5}$$

$$K_5=\frac{9}{\sqrt{103}-2}=\frac{\sqrt{103}+2}{11}=1+\frac{1}{K_6}$$

$$K_6=\frac{11}{\sqrt{103}-9}=\frac{\sqrt{103}+9}{2}=9+\frac{1}{K_7}$$

$$K_7=\frac{2}{\sqrt{103}-9}=\frac{\sqrt{103}+9}{11}=1+\frac{1}{K_8}$$

$$K_8=\frac{11}{\sqrt{103}-2}=\frac{\sqrt{103}+2}{9}=1+\frac{1}{K_9}$$

$$K_9=\frac{9}{\sqrt{103}-7}=\frac{\sqrt{103}+7}{6}=2+\frac{1}{K_{10}}$$

$$K_{10}=\frac{6}{\sqrt{103}-5}=\frac{\sqrt{103}+5}{13}=1+\frac{1}{K_{11}}$$

$$K_{11}=\frac{13}{\sqrt{103}-8}=\frac{\sqrt{103}+8}{3}=6+\frac{1}{K_{12}}$$

$$K_{12}=\frac{3}{\sqrt{103}-10}=\frac{\sqrt{103}+10}{1}=20+\frac{1}{K_{13}}$$

$$K_{13}=\frac{1}{\sqrt{103}-10}=K_1$$

开始循环。循环节的项数为

$$s=13-1=12$$

所以$\sqrt{103}=10+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right.$

$$\left.+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}\right)。$$

练　　习

(66)将$\sqrt{37}$化成连分数。

(67)将$\sqrt{m^2+2}$化成连分数。（m为正整数）

(68)化$\sqrt{14}$为连分数。

(69)将$\sqrt{54}$展开成循环连分数。

(70)用连分数的方法将51开平方。（精确到万分之一）

十二、关于$x^2-Ay^2=1$的正整数解

贝尔(Pell)方程：

$$x^2-Ay^2=1 \quad (A\text{是非完全平方的正整数})$$

是最基本的二元二次不定方程。它的正整数解，当A不很大时，一般可以用试验的办法得到。当A较大时，试验就有困难。

设(x, y)是贝尔方程的一组正整数解。那末

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{Ay^2+1}}{y}$$

若$y=1$，显然$\sqrt{A+1}$可由$\sqrt{A}$的连分数截段取得。

化连分数，可知

$$\sqrt{A}=\sqrt{x^2-1}=(x-1)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2(x-1)}\right)$$

其$\delta_?=(x-1)+1=x=\sqrt{A+1}$

若$y\neq1$，同上$\sqrt{Ay^2+1}$可由$\sqrt{Ay^2}$的连分数截段取得。于是

$\dfrac{x}{y}$的连分数，可由$\dfrac{\sqrt{Ay^2}}{y}$即$\sqrt{A}$的连分数截段取得。

所以$\frac{x}{y}$是$\sqrt{A}$的近数。因此可应用循环连分数来求贝尔方程的正整数解。下面对此进行探讨。

求 $x^2 - Ay^2 = 1$（A 是非完全平方的正整数）的正整数解。

先将$\sqrt{A}$化成循环连分数。

设$\sqrt{A} = a_1 + \frac{1}{K_1}$　　$a_1 = [\sqrt{A}]$，$K_1 > 1$。

$$K_1 = \frac{\sqrt{A} + b_1}{c_1} = a_2 + \frac{1}{K_2}，\ a_2 = [K_1]，\ K_2 > 1。$$

…

$K_{s+1} = K_1$，$a_{s+2} = a_2$

s是正整数，表示循环节的项数。

…

$$K_n = \frac{\sqrt{A} + b_n}{c_n} = a_{n+1} + \frac{1}{K_{n+1}}, a_{n+1} = [K_n]，\ K_{n+1} > 1。$$

（n是自然数）

…

则　$\sqrt{A} = a_1 + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_s} + \frac{1}{a_{s+1}}\right)$

又设各渐近分数为

$$\delta_1 = \frac{p_1}{q_1}，\ \delta_2 = \frac{p_2}{q_2}，\ \cdots$$

按连分数定理三

$\frac{p_{2m}}{q_{2m}}>\sqrt{A}$ 即 $p_{2m}-\sqrt{A}q_{2m}>0$（m 是正整数）

又按定理四

$$\frac{p_{2m}}{q_{2m}}-\sqrt{A}<\frac{1}{q_{2m}q_{2m+1}}$$

二边乘以 q_{2m} 得

$$p_{2m}-\sqrt{A}q_{2m}<\frac{1}{q_{2m+1}}$$

综合起来有：

$$0<p_{2m}-\sqrt{A}q_{2m}<\frac{1}{q_{2m+1}} \qquad (1)$$

对于 $p_{2m}+\sqrt{A}q_{2m}$ 显然有 $p_{2m}+\sqrt{A}q_{2m}>0$

仍从 $\sqrt{A}<\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$ 得 $p_{2m}+\sqrt{A}q_{2m}<2p_{2m}$

所以有 $0<p_{2m}+\sqrt{A}q_{2m}<2p_{2m}$ （2）

(1)×(2)可得

$$0<p_{2m}^2-Aq_{2m}^2<\frac{2p_{2m}}{q_{2m+1}} \qquad (3)$$

按定理六的推论，第一循环节末项

$$a_{s+1}=\left[\frac{c_{s+1}}{\sqrt{A}-b_{s+1}}\right] \qquad (4)$$

由于 $K_{s+1}=K_1$，开始循环，有

$$b_{s+1}=b_1 \qquad c_{s+1}=c_1$$

从 $$K_1=\frac{\sqrt{A}+b_1}{c_1}=\frac{1}{\sqrt{A}-[\sqrt{A}]}$$

$$=\frac{\sqrt{A}+[\sqrt{A}]}{A-[\sqrt{A}]^2}$$

得 $b_1=[\sqrt{A}]$， $c_1=A-[\sqrt{A}]^2$。

代入（4）式

$$a_{s+1}=\left[\frac{c_1}{\sqrt{A}-b_1}\right]=\left[\frac{A-[\sqrt{A}]^2}{\sqrt{A}-[\sqrt{A}]}\right]$$

$$=\left[\sqrt{A}+[\sqrt{A}]\right]=2[\sqrt{A}] \qquad (5)$$

当$n\geqslant 2$ 时，由定理三，四推知：

$$a_1+\frac{1}{a_2}\geqslant\frac{p_n}{q_n}>a_1$$

据此可以推得

$$2[\sqrt{A}]\geqslant[\sqrt{A}]+1$$

$$\geqslant a_1+\frac{1}{a_2}$$

$$\geqslant\frac{p_n}{q_n} \qquad (6)$$

这里，$a_2\geqslant 1$，故有 $\frac{1}{a_2}\leqslant 1$

（6）代入（5）得

$$a_{s+1}\geqslant\frac{p_n}{q_n} \quad (n\geqslant 2) \qquad (7)$$

若s为偶数，令$s=2m$，那末（3）式右边为

$$\frac{2p_{2m}}{q_{2m+1}}=\frac{2p_s}{q_{s+1}}$$

$$=\frac{2p_s}{a_{s+1}q_s+q_{s-1}}<\frac{2p_s}{a_{s+1}q_s}\leqslant\frac{2p_s}{\frac{p_s}{q_s}\cdot q_s}=2$$

不等式的最后一步见上（7）式，取$n=s$。

所以（3）式变成

$$0<p_S^2-Aq_S^2<2$$

但$p_S^2-Aq_S^2$是整数，故得

$$p_S^2-Aq_S^2=1$$

$(p_s,\ q_s)$即为不定方程$x^2-Ay^2=1$的一组正整数解，这里$s=2m$是指第一循环节倒数第二项的“番号”。

因此，当s为偶数时，以每一循环节倒数第二项截段计算，得到的$(p_s,\ q_s)$，$(p_{2s},\ q_{2s})$，$(p_{3s},\ q_{3s})$…都是满足方程$x^2-Ay^2=1$的正整数对。

若s为奇数，那末第二循环节倒数第二项的“番号”是$2s$为偶数，可令$2s=2m$，则$(p_{2s},\ q_{2s})$为满足方程的一组正整数解。

因此，当s为奇数时，$(p_{2s},\ q_{2s})$，$(p_{4s},\ q_{4s})$，$(p_{6s},\ q_{6s})$…都是满足方程$x^2+Ay^2=1$的正整数对。

总之，循环节的倒数第二项的“番号”为ts（t是正整数），只要ts是偶数，则$(p_{ts},\ q_{ts})$就是方程$x^2-Ay^2=1$的正整数解。

因为循环连分数是无限的，不定方程 $x^2-Ay^2=1$（A是非完全平方的正整数）它的正整数解有无穷组。

例42　求$x^2-5y^2=1$的三组正整数解。

解：化连分数

$$\sqrt{5}=2+\left(\frac{1}{4}\right)$$

循环节的项数 $s=1$。

近数：$\delta_1=\frac{2}{1}$，$\delta_2=\frac{9}{4}$，$\delta_3=\frac{38}{17}$，$\delta_4=\frac{161}{72}$，

$$\delta_5=\frac{682}{305},\quad \delta_6=\frac{2889}{1292}.$$

取"番号"为偶数的δ_2，δ_4，δ_6得$(x,\ y)$的三组正整数解为：(9，4)，(161，72)，(2889，1292)

例43　求适合方程$x_2-13y^2=1$ 的一组正整数解。

解：化连分数。

$$\sqrt{13}=3+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}\right),\ s=5\ \text{为奇数。}$$

$$\delta_1=\frac{3}{1},\ \delta_2=\frac{4}{1},\ \delta_3=\frac{7}{2},\ \delta_4=\frac{11}{3},\ \delta_5=\frac{18}{5},\ \delta_6=\frac{119}{33}$$

$$\delta_7=\frac{137}{38},\ \delta_8=\frac{256}{11},\ \delta_9=\frac{393}{109},\ \delta_{10}=\frac{649}{180}$$

取(p_{2s},q_{2s})即(p_{10},q_{10}) 得原方程的一组正整数解为

(649，180)

例44　一批装箱成正方体的货物，整齐地平放在场地

上，正好成正方形。由于占地较大，工人们将货物一层一层地迭起来，每层都成正方形，上下一样齐，一共迭了8层高，最后留下1箱。这批货物数目不多，问共有几箱？

解：设这批货物共有x^2箱，迭成8层，每层为y^2箱。

则有 $x^2-8y^2=1$

解方程，先化连分数

$$\sqrt{8}=2+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}\right),\ s=2。$$

$$\delta_1=\frac{2}{1},\ \delta_2=\frac{3}{1},\ \delta_3=\frac{14}{5},\ \delta_4=\frac{17}{6},\ \delta_5=\frac{82}{29},$$

$$\delta_6=\frac{99}{35}\cdots$$

取$(p_2,\ q_2)$，$(p_4,\ q_4)$，$(p_6,\ q_6)$ …得符合方程的正整数对为：

(3，1)，(17，6)，(99，35)…

对应的货物箱数为 9，289，9801…

第一个答案，货物仅9箱，迭成8层，每层1箱，又可迭成9层，故不合题意。

第三个答案，货物总数为9801箱，平放在场地上呈每边99箱的正方形。虽有可能，数目似较大。

后面的正整数对所决定的箱数更大，不合题意。

所以比较切合题意的是第二个答案，这批货物共有289箱。

上面是运用连分数的渐近分数$\frac{p_{2m}}{q_{2m}}>\sqrt{A}$和$(p_{ts},\ q_{ts})$

的特殊性质来求 $x^2-Ay^2=1$ 型方程的正整数解。

对于 $x^2-Ay^2=-1$，型方程的正整数解，相仿地我们可以利用连分数的渐近分数 $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}<\sqrt{A}$ 和 $(p_{ts},\ q_{ts})$ 的特殊性质来求解。即当 ts 是奇数时，则 $(p_{ts},\ q_{ts})$ 就是不定方程 $x^2-Ay^2=-1$ 的正整数解。且若有解，必有无穷组解。

然而不定方程 $x^2-Ay^2=-1$ 不一定有正整数解，如当 s 为偶数时，ts 不可能为奇数，此时无正整数解。

例45　求二组满足方程 $x^2-41y^2=-1$ 的正整数时。

解：化连分数

$$\sqrt{41}=6+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right),\ s=3\text{奇数。}$$

$$\delta_1=\frac{6}{1},\ \delta_2=\frac{13}{2},\ \delta_3=\frac{32}{5},\ \delta_4=\frac{397}{62},\ \delta_5=\frac{826}{129},$$

$$\delta_6=\frac{2049}{320},\ \delta_7=\frac{25414}{3969},\ \delta_8=\frac{52877}{8258},$$

$$\delta_9=\frac{131168}{20485}$$

取 $(p_3,\ q_3)$，$(p_9,\ q_9)$ 即得满足方程 $x^2-41y^2=-1$ 的二组正整数对(32， 5)，(131168，20485)。

例46　证明方程 $x^2-3y^2=-1$ 无整数解。

证明：若 $x^2-3y^2=-1$ 有正整数解，那末 x 和 y 不能同时为奇数或同时为偶数，只能是一奇一偶。

首先我们证明"奇数的平方除以4，余数为1"，

设奇数为$2n+1$。(n为自然数)

$$(2n+1)^2=4n(n+1)+1$$

现在假定适合方程的x是奇数，y是偶数。

将方程变形成$x^2+1=3y^2$。

很清楚左边x^2除以4余1，x^2+1除以4就余2了。而右边$3y^2$能为4所整除，因此左右二边矛盾。即上述假定为不可能。

其次假定适合方程的x是偶数，y是奇数。

那末x^2能被4整除，x^2+1除以4就余1了。而右边y^2被4除，余1，$3y^2$被4除就余3了。左右二边仍矛盾，此假定也不可能。

至此讨论了x，y为奇偶数的所有情况，证明了原不定方程$x^2-3y^2=-1$无正整数解，自然也无负整数解。

至于零解，若$x=0$则$3y^2=1$，无整数解。若$y=0$，$x^2=-1$，不成立。故亦无零解。

总之，不定方程$x^2-3y^2=-1$无整数解。

从此例可以推知$x^2-Ay^2=-1$（A是非完全平方的正整数）无零解。

练　　习

(71) 用连分数法求出$x^2-3y^2=1$的四组正整数解。

(72) 求方程$x^2-6y^2=1$的三组正整数解。

(73) 求二对适合方程$x^2-7y^2=1$的正整数(x, y)

(74) 求适合方程$x^2-79y^2=1$的一对正整数解，并代

入检验。

(75)求满足方程$x^2-29y^2=1$的一组正整数。

(76)用连分数法求出适合方程$x^2-10y^2=-1$的三组正整数解。

(77)求满足方程$x^2-73y^2=-1$的一组正整数对。

(78)方程$x^2-8y^2=-1$有没有整数解，试推证之。

(79)小明在方格练习簿上，依照横竖的格子线描了1个大正方形，11个相同的小正方形。然后他数了一数，大正方形内所包含的小方格数目比11个小正方形内总共包含的小方格数目还多1个。小明所描的大正方形里究竟有多少个小方格？小正方形呢？（本题所描的正方形无重迭）

(80)几个班级集合起来进行队列操练，正好可以列成15个方阵，使人数不多不少。如果全部列成一个大方阵，则缺少1个人。问这几个班级总共有多少人？

十三、关于$x^2-Ay^2=1$的整数解

方程$x^2-Ay^2=1$（A是非完全平方的正整数），除了有无穷组正整数解外，还有无穷组负整数解，这只要在正整数解前面加上负号就可获得（包括一正一负的整数解）。至于零解也有二组，即是(1，0)，(－1，0)。

例如，对于方程$x^2-2y^2=1$很容易举出以下六组整数解。

(3，2)，(1，0)，(－1，0)，(－3，2)，(3，－2)，(－3，－2)

若方程$x^2-Ay^2=1$（A是非完全平方的正整数）的一组整数解为(x_1, y_1)，我们可用方程的形式来表示。

$$x+\sqrt{A}\,y=x_1+\sqrt{A}\,y_1$$

由于A是非完全平方的正整数，$\sqrt{A}$是个无理数。

若$y\neq y_1$，则

$$\sqrt{A}=\frac{x_1-x}{y-y_1}$$

出现无理数等于有理数的矛盾情况，因此$y=y_1$

所以上面的方程，就是表示

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

同时上面的推证说明，对于满足方程$x^2 - Ay^2 = 1$的不同整数对(x, y)，形式$x + \sqrt{A}y$所表示的值是各不相同的，不可能有二组不同的整数解使$x + \sqrt{A}y$具有相同的值。

如果(x_0, y_0)是方程$x^2 - Ay^2 = 1$的正整数解，且对应的$x_0 + \sqrt{A}y_0$的值比起其他正整数解所对应的$x + \sqrt{A}y$的值来是最小的，我们就把形式$x + \sqrt{A}y = x_0 + \sqrt{A}y_0$所表示的正整数解$(x_0, y_0)$叫做方程的最小解。

仍以$x^2 - 2y^2 = 1$为例，其最小解为

$$x + \sqrt{2}y = 3 + 2\sqrt{2}$$

类似于二元一次不定方程通过它的一组特解就可以得到所有的整数解，二元二次不定方程$x^2 - Ay^2 = 1$则可以通过它的最小解来获得一切整数解的通式。

先让我们证明一个定理。

定理七 如果(x_1, y_1)，(x_2, y_2)是方程$x^2 - Ay^2 = 1$的二组整数解，那末

$$x_3 + \sqrt{A}y_3 = (x_1 + \sqrt{A}y_1)(x_2 + \sqrt{A}y_2)$$

所决定的(x_3, y_3)也是方程的整数解。

证明：$x_3 + \sqrt{A}y_3 = (x_1x_2 + Ay_1y_2) + \sqrt{A}(x_2y_1 + x_1y_2)$

即 $\begin{cases} x_3 = x_1x_2 + Ay_1y_2 \\ y_3 = x_2y_1 + x_1y_2 \end{cases}$

于是 $x_3^2 - Ay_3^2 = (x_3 - \sqrt{A}\,y_3)(x_3 + \sqrt{A}\,y_3)$

$$= (x_1x_2 + Ay_1y_2 - \sqrt{A}\,x_2y_1 - \sqrt{A}\,x_1y_2)$$

$$\cdot(x_1x_2 + Ay_1y_2 + \sqrt{A}\,x_2y_1 + \sqrt{A}\,x_1y_2)$$

$$= (x_1 - \sqrt{A}\,y_1)(x_2 - \sqrt{A}\,y_2)(x_1 + \sqrt{A}\,y_1)(x_2 + \sqrt{A}\,y_2)$$

$$= (x_1^2 - Ay_1^2)(x_2^2 - Ay_2^2)$$

$$= 1$$

所以$(x_3,\ y_3)$是方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的整数解。定理证毕。

定理七中若$(x_1,\ y_1)$与$(x_2,\ y_2)$完全相同，定理仍成立。

此时 $x_3 + \sqrt{A}\,y_3 = (x_1 + \sqrt{A}\,y_1)^2$

推论下去，由 $x_4 + \sqrt{A}\,y_4 = (x_1 + \sqrt{A}\,y_1)^3$

…

$$x_n + \sqrt{A}\,y_n = (x_1 + \sqrt{A}\,y_1)^n \text{ (}n\text{是正整数)}$$

所决定的（x_4，y_4），…（x_n，y_n）都是原方程的整数解。

以最小解$(x_0,\ y_0)$代替$(x_1,\ y_1)$得

$$x + \sqrt{A}\,y = (x_0 + \sqrt{A}\,y_0)^n \text{ (}n\text{ 是正整数)}$$

显然，所决定的（x，y）都是方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的正

整数解。

若令$n=0$，只能$x=1$，$y=0$即为含零解。

若令n为负整数，我们注意到

$$
\begin{aligned}
x+\sqrt{A}y &= (x_0+\sqrt{A}y_0)^n \\
&= \frac{1}{(x_0-\sqrt{A}y_0)^n} \\
&= (x_0-\sqrt{A}y_0)^{-n}
\end{aligned}
$$

这里，$-n$是正整数，可知此时y为负整数。

因此方程$x^2-Ay^2=1$的整数解，只要将n的定义域从正整数集扩大到整数集，并在前面加上一个“±”号。

$$x+\sqrt{A}y=\pm(x_0+\sqrt{A}y_0)^n \ (n\text{为整数}) \qquad (1)$$

但包含在这个式子中的解是不是$x^2-Ay^2=1$的所有整数解呢？

由于此方程整数解的正负对偶性，因此关于这一点我们只要论证$(x,\ y)$为正整数的情况。

假设存在一组正整数解$(x',\ y')$它不包含在上面的式子（1）中。

由于$(x_0+\sqrt{A}y_0)^n$当n顺次取1，2，3，…时，便得到无限递增数列$(x_0+\sqrt{A}y_0)$，$(x_0+\sqrt{A}y_0)^2$，$(x_0+\sqrt{A}y_0)^3$，…

所以必有正整数m，使得$n=m$时，

$$(x_0+\sqrt{A}y_0)^m<x'+\sqrt{A}y'<(x_0+\sqrt{A}y_0)^{m+1} \qquad (2)$$

从 $(x_0+\sqrt{A}y_0)\cdot(x_0-\sqrt{A}y_0)=1>0$ 和 $x_0+\sqrt{A}y_0>0$

推知 $x_0-\sqrt{A}y_0>0$，$(x_0-\sqrt{A}y_0)^m>0$

今以 $(x_0-\sqrt{A}y_0)^m$ 乘不等式(2)，得

$$(x_0+\sqrt{A}y_0)^m(x_0-\sqrt{A}y_0)^m<(x'+\sqrt{A}y')(x_0-\sqrt{A}y_0)^m<(x_0+\sqrt{A}y_0)^{m+1}(x_0-\sqrt{A}y_0)^m \quad (3)$$

其中 $(x'+\sqrt{A}y')(x_0-\sqrt{A}y_0)^m$ 按定理七推之，必决定了方程 $x^2-Ay^2=1$ 的一组整数解。

设 $x''+\sqrt{A}y''=(x'+\sqrt{A}y')(x_0-\sqrt{A}y_0)^m$，于是(3)式成

$$1<x''+\sqrt{A}y''<x_0+\sqrt{A}y_0 \quad (4)$$

据此分析 (x'', y'') 是否可能存在。

1° 设 (x'', y'') 为正整数解，显然与 (x_0, y_0) 为方程的最小解相矛盾。(见(4)式)

2° 设 (x'', y'') 都是负数，则与(4)式 $x''+\sqrt{A}y''>1$ 不符。

3° 设 (x'', y'') 为一正一负，则

$$|x''-\sqrt{A}y''|>|x''+\sqrt{A}y''|>1$$

推出 $|(x''+\sqrt{A}y'')(x''-\sqrt{A}y'')|>1$

与 (x'', y'') 是方程 $x^2-Ay^2=1$ 的解相矛盾。

4° 设 $y''=0$ 即零解，按(4)式 $x''>1$

与 (x'', y'') 是方程 $x^2-Ay^2=1$ 的解相矛盾。

总之(x'', y'')是不存在的，也就推翻了前面关于(x', y')是方程$x^2 - Ay^2 = 1$不包含在（1）式中的正整数解的假设。

经过前面的推导和证明，我们得到了

定理八 二元二次不定方程

$$x^2 - Ay^2 = 1 \text{（}A\text{是非完全平方的正整数）}$$

它的整数解为：

$$x + \sqrt{A}y = \pm(x_0 + \sqrt{A}y_0)^n$$

其中(x_0, y_0)是最小解，n是整数。

又它的正整数解为：

$$x + \sqrt{A}y = (x_0 + \sqrt{A}y_0)^n \text{（此处}n\text{是正整数）}$$

至此，解决了寻求$x^2 - Ay^2 = 1$的整数解通式的问题。

例47 求$x^2 + 23y^2 = 1$的整数解的通式，并按通式求出它的最初几组解。

解：先用连分数求最小解。

$$\sqrt{23} = 4 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8}\right) \qquad s = 4$$

取 $\delta_4 = \frac{24}{5}$ 得最小解$(24, 5)$

故$x^2 - 23y^2 = 1$整数解的通式为：

$$x + \sqrt{23}y = \pm(24 + 5\sqrt{23})^n \text{（}n\text{是整数）}$$

它的最初几组解：

取$n = 0$，$x + \sqrt{23}y = \pm 1$

得二组含零解(1，0)，(－1，0)。

取 $n=\pm1$，$x+\sqrt{23}y=\pm(24+5\sqrt{23})^{\pm1}$

得四组整数解(24，5)，(－24，－5)，(24，－5)，(－24，5)。

取$n=\pm2$，$x+\sqrt{23}y=\pm(24+5\sqrt{23})^{\pm2}$

$$=\pm(24\pm5\sqrt{23})^2$$

$$=\pm(1151\pm240\sqrt{23})$$

得四组整数解。为：

(1151，240)(－1151，－240)，(1151，－240)，

(－1151，240)

注意：$(24+5\sqrt{23})^{-1}=(24-5\sqrt{23})$

例48　求$x^2-(m^2-m)y^2=1$的整数解。

（m是大于1的正整数）

解：因$(m-1)^2<m(m-1)<m^2$

故m^2-m不是完全平方数，但为正整数。

将$\sqrt{m^2-m}$化成连分数。

设$\sqrt{m^2-m}=a_1+\dfrac{1}{K_1}$，$a_1=[\sqrt{m^2-m}]=m-1$，

$K_1>1$。

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{m^2-m}-a_1}=\frac{1}{\sqrt{m^2-m}-(m-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2-m}+(m-1)}{m-1}。$$

设 $K_1=a_2+\frac{1}{K_2}$，$a_2=[K_1]=\left[\frac{(m-1)+(m-1)}{(m-1)}\right]$

$=2$。

$$K_2>1。$$

$$K_2=\frac{1}{K_1-a_2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-m}+(m-1)}{m-1}-2}$$

$$=\sqrt{m^2-m}+(m-1)$$

设 $K_2=a_3+\frac{1}{K_3}$，$a_3=[K_2]=2(m-1)$，$K_3>1$。

$$K_3=\frac{1}{K_2-a_3}=\frac{1}{\sqrt{m^2-m}-(m-1)}=K_1$$

开始循环，$s=2$。

$$\sqrt{m^2-m}=(m-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(m-1)}\right)$$

取 $\delta_2=(m-1)+\frac{1}{2}=\frac{2m-1}{2}$ 得最小解 $(2m-1,2)$

所以原方程整数解的通式为

$$x+\sqrt{m^2-m}\,y=\pm(2m-1+2\sqrt{m^2-m})^n$$

(n是整数)

练 习

(81) 求$x^2-17y^2=1$正整数解的通式。

(82) 求$x^2-63y^2=1$ 整数解的通式。并按通式求出当$n=0$，±1，±2时的各组整数解。

(83)求$x^2-55y^2=1$的一切整数解。

(84)求$x^2-(m^2+m)y^2=1$的整数解的通式。(m是正整数)

十四、关于 $x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$ 的整数解

我们已经研究了贝尔方程 $x^2-Ay^2=1$ 的整数解。得到了它的通式。现在将获得的结果加以推广，讨论

$$x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$$

形式的二元二次不定方程。这里A是非完全平方的正整数，C_n是$\sqrt{A}$化连分数时

$$\sqrt{A}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{K_n};\quad K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{C_n}$$

中的C_n。

设　$\delta_n=\dfrac{p_n}{q_n}$是$\sqrt{A}$的第$n$个近数。

那末　$\sqrt{A}=\dfrac{p_nK_n+p_{n-1}}{q_nK_n+q_{n-1}}$

$$=\frac{p_n\dfrac{\sqrt{A}+b_n}{C_n}+p_{n-1}}{q_n\dfrac{\sqrt{A}+b_n}{C_n}+q_{n-1}}$$

$$=\frac{p_n(\sqrt{A}+b_n)+p_{n-1}C_n}{q_n(\sqrt{A}+b_n)+q_{n-1}C_n}$$

得 $Aq_n+\sqrt{A}(b_nq_n+C_nq_{n-1})=b_np_n+C_np_{n-1}+\sqrt{A}\,p_n$

由于$\sqrt{A}$是无理数，上式二边整数部分与无理数部分分别相等。即

$$Aq_n=b_np_n+C_np_{n-1} \qquad (1)$$

$$p_n=b_nq_n+C_nq_{n-1} \qquad (2)$$

将(2)式乘以p_n，(1)式乘以q_n，然后相减得

$$p_n^2-Aq_n^2=C_n(p_nq_{n-1}-q_np_{n-1})$$

按定理二 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^n$代人上式。

$$p_n^2-Aq_n^2=(-1)^nC_n$$

所以$(p_n,\ q_n)$是方程$x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$的正整数解。

按$\sqrt{A}$化连分数的无限循环性，有一组正整数解就有无穷组正整数解。只要取$C_t=C_n$，(t为大于循环节项数s的正整数)且t与n同奇偶，则(p_t,q_t)也是此方程的正整数解。

例49 用连分数法，求出方程

$$x^2-43y^2=9$$

的一组最小正整数解。

解：化连分数。

$$\sqrt{43}=6+\frac{1}{K_1},\quad K_1>1。$$

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{43}-6}=\frac{\sqrt{43}+6}{7}=1+\frac{1}{K_2},\quad K_2>1。$$

$$K_2=\frac{7}{\sqrt{43}-1}=\frac{\sqrt{43}+1}{6}=1+\frac{1}{K_3},\quad K_3>1。$$

$$K_3=\frac{6}{\sqrt{43}-5}=\frac{\sqrt{43}+5}{3}=3+\frac{1}{K_4},\ K_4>1。$$

$$K_4=\frac{3}{\sqrt{43}-4}=\frac{\sqrt{43}+4}{9}=\frac{\sqrt{43}+b_4}{C_4}\ 。$$

至此得 $C_4=9$，$n=4$为偶数，符合

$$(-1)^nC_n=(-1)^4\cdot 9=9$$

所以原方程$x^2-43y^2=9$ 为$x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$形式的方程。

取 $\delta_4=6+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{46}{7}$

得最小正整数解为（46，7）

例50 用连分数法，求出满足方程

$$x_2-71y^2=-11$$

的二组正整数解。它的第三组正整数解(p_n, q_n)的“番号”n应取几？

解：化连分数。

$$\sqrt{71}=8+\frac{1}{K_1},\ K_1>1。$$

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{71}-8}=\frac{\sqrt{71}+8}{7}=2+\frac{1}{K_2},\ K_2>1。$$

$$K_2=\frac{7}{\sqrt{71}-6}=\frac{\sqrt{71}+6}{5}=2+\frac{1}{K_3},\ K_3>1。$$

$K_3=\frac{5}{\sqrt{71}-4}=\frac{\sqrt{71}+4}{11}$ 这里$C_3=11$，$n=3$为奇数，有

$(-1)^3\cdot 11=-11$ 合题。

取$\delta_3=8+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{42}{5}$

故第一组正整数解为（42，5）。

继续将$\sqrt{71}$化连分数。

$$K_3=1+\frac{1}{K_4},\ K_4>1。$$

$$K_4=\frac{11}{\sqrt{71}-7}=\frac{\sqrt{71}+7}{2}=7+\frac{1}{K_5},\ K_5>1。$$

$$K_5=\frac{2}{\sqrt{71}-7}=\frac{\sqrt{71}+7}{11}=1+\frac{1}{K_6},\ K_6>1。$$

这里又有$C_5=11$，且$n=5$为奇数，合题。

取　$\delta_5=\frac{455}{54}$

得第二组正整数解为（455,54）。

继续将$\sqrt{71}$化连分数。

$$K_6=\frac{\sqrt{71}+4}{5}=2+\frac{1}{K_7},$$

$$K_7=\frac{\sqrt{71}+6}{7}=2+\frac{1}{K_8}$$

$$K_8=\sqrt{71}+8=16+\frac{1}{K_9},$$

$$K_9=\frac{1}{\sqrt{71}-8}=K_1\ （循环）$$

$s=8$

因此第三组正整数解对应于$C_{3+8}=C_{11}$，"番号" $n=11$。

在$x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$型方程中，适合$x^2-Ay^2=C_n$的n为偶数，适合$x^2-Ay^2=-C_n$的n为奇数。按连分数法(p_n,q_n)是它的最小解，其后诸正整数解"番号"需与n同奇偶。

例51 求适合$x^2-109y^2=-15$的一对正整数。按连分数法，它的第二、第三对正整数解(p_n,q_n)的"番号"n各应取几？

解： 化连分数。

$$\sqrt{109}=10+\frac{1}{K_1} \qquad K_1=\frac{\sqrt{109}+10}{9}=2+\frac{1}{K_2}$$

$$K_2=\frac{\sqrt{109}+8}{5}=3+\frac{1}{K_3}$$

$$K_3=\frac{\sqrt{109}+7}{12}=1+\frac{1}{K_4}$$

$$K_4=\frac{\sqrt{109}+5}{7}=2+\frac{1}{K_5}$$

$$K_5=\frac{\sqrt{109}+9}{4}=4+\frac{1}{K_6}$$

$$K_6=\frac{\sqrt{109}+7}{15}=1+\frac{1}{K_7}$$

$$K_7=\frac{\sqrt{109}+8}{3}=6+\frac{1}{K_8}$$

$$K_8=\frac{\sqrt{109}+10}{3}=6+\frac{1}{K_9}$$

$$K_9=\frac{\sqrt{109}+8}{15}=1+\frac{1}{K_{10}}$$

$$K_{10}=\frac{\sqrt{109}+7}{4}=4+\frac{1}{K_{11}}$$

$$K_{11}=\frac{\sqrt{109}+9}{7}=2+\frac{1}{K_{12}}$$

$$K_{12}=\frac{\sqrt{109}+5}{12}=1+\frac{1}{K_{13}}$$

$$K_{13}=\frac{\sqrt{109}+7}{5}=3+\frac{1}{K_{14}}$$

$$K_{14}=\frac{\sqrt{109}+8}{9}=2+\frac{1}{K_{15}}$$

$$K_{15}=\sqrt{109}+10=20+\frac{1}{K_{16}}$$

$$K_{16}=\frac{1}{\sqrt{109}-10}=\frac{\sqrt{109}+10}{9}=K_1$$ 开始循环。

$s=16-1=15$为奇数。

上面$C_6=15$，但“番号” 6 为偶数，不合题目要求。

$C_9=15$ “番号” 9 为奇数，合题。

$$\delta_8=10+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{58591}{5612}$$

得满足$x^2-109y^2=-15$的一对正整数(58591，5612)。

又从上面可以推得$C_{6+15}=15$，“番号” 21为奇数，合题。而$C_{9+15}=15$，“番号”24为偶数，不合题。需$C_{9+15+15}=C_{39}$才合题。因此原方程的第二，第三对正整数解（p_n，q_n）的“番号”应为$n=21$和$n=39$。

由连分数法可知方程 $x^2-Ay^2=(-1)^nC_n$（A是非完全

平方的正整数）有无穷多组正整数解，自然就有无穷多组整数解。当$C_n=1$时，就成为最基本的二元二次不定方程了。所以$x^2-Ay^2=(-1)^n C_n$型方程仅是$x^2-Ay^2=\pm1$ 型方程的推广而已。

若(x_1, y_1)是方程$x^2-Ay^2=1$的整数解，(x_2, y_2) 是方程$x^2-Ay^2=(-1)^n C_n$的整数解。我们来看，由

$$x_3+\sqrt{A}\,y_3=(x_1+\sqrt{A}\,y_1)(x_2+\sqrt{A}\,y_2)$$

所决定的整数对(x_3, y_3)

这里 $$\begin{cases} x_3=x_1x_2+Ay_1y_2 \\ y_3=x_1y_2+x_2y_1 \end{cases}$$

显然有 $$\begin{aligned} x_3^2-Ay_3^2 &= (x_3-\sqrt{A}\,y_3)(x_3+\sqrt{A}\,y_3) \\ &= (x_1-\sqrt{A}\,y_1)(x_2-\sqrt{A}\,y_2)(x_1+\sqrt{A}\,y_1) \\ &\quad (x_2+\sqrt{A}\,y_2) \\ &= (-1)^n C_n \end{aligned}$$

就是说整数对(x_3, y_3)是方程$x^2-Ay^2=(-1)^n C_n$的整数解。因此我们可以很简便地利用基本方程$x^2-Ay^2=1$的整数解通式来写出$x^2-Ay^2=(-1)^n C_n$的整数解通式。

设(x_0, y_0)是方程$x^2-Ay^2=1$的最小解，(x_1, y_1)是方程$x^2-Ay^2=(-1)^n C_n$的最小解。那末，方程$x^2-Ay^2=(-1)^n C_n$的整数解为：

$$x+\sqrt{A}\,y=\pm(x_0+\sqrt{A}\,y_0)^n(x_1\pm\sqrt{A}\,y_1)\ (n\text{是整数})$$

例52　求方程 $x^2-33y^2=-8$的整数解通式，并算出它的最初几组整数解。

解：$\sqrt{33}=5+\frac{1}{K_1}$，

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{33}-5}=\frac{\sqrt{33}+5}{8}=1+\frac{1}{K_2}$$

$$K_2=\frac{8}{\sqrt{33}-3}=\frac{\sqrt{33}+3}{3}=2+\frac{1}{K_3},$$

$$K_3=\frac{\sqrt{33}+3}{8}=1+\frac{1}{K_4},\quad K_4=\sqrt{33}+5=10+\frac{1}{K_5},$$

$$K_5=\frac{1}{\sqrt{33}-5}=K_1\ 。$$

$$\therefore\quad \sqrt{33}=5+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{10}\right)\qquad \delta_4=\frac{23}{4}$$

即方程$x^2-33y^2=1$的最小解为(23；4)。

又$C_1=8$，“番号”为奇数，合题。

取$\delta_1=5$，得方程$x^2-33y^2=-8$的最小解（5，1）。

所以方程$x^2-33y^2=-8$的整数解为

$x+\sqrt{33}y=\pm(23+4\sqrt{33})^n(5\pm\sqrt{33})$（$n$为整数）

它的最初几组整数解。

$n=0$时，为(5，1)(5，-1)(-5，-1)(-5，1)

$n=\pm1$时，得

$\pm(23\pm4\sqrt{33})(5\pm\sqrt{33})=\pm[(23\times5\pm4\times33)+\sqrt{33}(20\pm23)]$

有八组解，为(17，3)(-17，-3)(247，43)，(-247，-43)，(17，-3)，(-17，3)，(247，-43)，(-247，43)。

例53　求方程$x^2-21y^2=4$的整数解。

解：$\sqrt{21}=4+\frac{1}{K_1}$　　$K_1=\frac{\sqrt{21}+4}{5}=1+\frac{1}{K_2}$

$K_2=\frac{\sqrt{21}+1}{4}=1+\frac{1}{K_3}$　　$K_3=\frac{\sqrt{21}+3}{3}=2+\frac{1}{K_4}$

$K_4=\frac{\sqrt{21}+3}{4}=1+\frac{1}{K_5}$　　$K_5=\frac{\sqrt{21}+1}{5}=1+\frac{1}{K_6}$

$K_6=\sqrt{21}+4=8+\frac{1}{K_7}$　　$K_7=K_1$

$s=6$，取$\delta_6=\frac{55}{12}$，得$x_0=55$，$y_0=12$。

又$C_2=4$，$n=2$为偶数，合题。

由$\delta_2=\frac{5}{1}$，得 $x_1=5$，$y_1=1$ 。

所以方程$x^2-21y^2=4$的整数解为

$x+\sqrt{21}y=\pm(55+12\sqrt{21})^n(5\pm\sqrt{21})$（$n$为整数）

例54　有数千块正方形的小磁砖，用来铺一些同样大小的正方形平面，正好可以铺7个这样的平面。如果全部用来铺一块大正方形平面，最后还多3块，求这批小磁砖的数目。

解：设铺大正方形平面需小方磁砖x^2块，铺一个小正方形平面需小方磁砖y^2块。

按题意　$x^2+3=7y^2$

即　　$x^2-7y^2=-3$

解之。$\sqrt{7}=2+\frac{1}{K_1}$　　$K_1=\frac{\sqrt{7}+2}{3}=1+\frac{1}{K_2}$

$$K_2 = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{K_3}$$

$$K_3 = \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{1}{K_4}$$

$$K_4 = \sqrt{7} + 2 = 4 + \frac{1}{K_5} \qquad K_5 = K_1$$

$s = 4$，$\delta_1 = \frac{2}{1}$，$\delta_2 = \frac{3}{1}$，$\delta_3 = \frac{5}{2}$，$\delta_4 = \frac{8}{3}$。

所以$x^2 - 7y^2 = -3$的整数解为

$$x + \sqrt{7}\ y = \pm\ (8 + 3\sqrt{7})^n (2 \pm \sqrt{7})$$（n为整数）

其正整数解，

$n = 0$时，为（2，1）。

$n = 1$时，为（5，2），（37，14）。

$n = 2$时，有 $x + \sqrt{7}\ y = \pm\ (64 + 63 + 48\sqrt{7})(2 \pm \sqrt{7})$ 得（82，31），（590，223）。

$n = 3$时，有

$$x + \sqrt{7}\ y = \pm\ [512 + 1512 + \sqrt{7}\ (576 + 189)](2 \pm \sqrt{7})$$ 得（1307，494），（9403，3554）。

…

按从小到大的顺序排列，小磁砖的数目（$x^2 + 3$）可能为

7，28，1372，6727，348103，…

其中符合题目“数千块”的解是$x=82$。

这批小方磁砖的数目是6727块。

练　　习

(85)用连分数法求方程$x^2-67y^2=9$的一组正整数解。

(86)求出二组正整数对，使满足方程$x^2-38y^2=-2$。

(87)求方程$x^2-22y^2=-2$的最小解。

(88)用连分数法求出方程$x^2-13y^2=-3$的一组正整数解，它的第二，第三对正整数解(p_n, q_n)的“番号”n各应取几？

(89)求$x^2-57y^2=7$的整数解通式，并算出它的最初几组解。

(90)求$x^2-34y^2=-9$的整数解通式。

(91)求$x^2-18y^2=-2$的整数解通式。

(92)有二种方形的包装箱，横竖每边可放货物的数量相同，箱内装一层货物。若将一只大包装箱内装的货物分装到3只小包装箱内，那末还少2件才能使3只小包装箱都装满，问二种包装箱各能装多少件货物？

(93)有大小一样，各种颜色的正方塑料块，将它们全部胶合成一个大正方形还多3块，如将它们胶合成大小相同的小正方形，则正巧可以胶成12个正方形，求这批塑料块的数目。

十五．关于$x^2-Ay^2=C$的整数解

前面几节讨论的二元二次不定方程可以归纳为

$$x^2-Ay^2=C$$

的形式。（A是非零整数，C是整数）

1° 若$C=0$，$A>0$则方程仅当A为完全平方时有整数解，且有无穷组解。

如$C=0$，$A<0$只有零解，即$x=0$，$y=0$。

2° 当A是完全平方的正整数时，方程无正整数解，或只具有有穷组整数解。此时可运用平方差公式进行因式分解，然后按奇偶分析法和约倍数分析法得解。（第十节）

3° 当A是负整数时，若$C<0$无解。若$C>0$，

设$x^2=u$，$y^2=v$进行代换。得

$$u+|A|v=C$$

为一次不定方程。可以先求它的正整数解(u,v)，再求$x^2-Ay^2=C$的整数解(x,y)。

由于二元一次不定方程$u+|A|v=C$正整数解的有限性，故此时$x^2-Ay^2=C$无整数解或仅具有有穷组整数解。且解的组数较之一次不定方程$u+|A|v=C$远为少得多。若方程比较简单，可用直接代入试验的方法来求解。

例55 求不定方程$x^2+12y^2=1621$的整数解

解：设$y^2=K$，则

$$x^2=1621-12K \tag{1}$$

K为完全平方数，且$0<K\leqslant\left[\frac{1621}{12}\right]=135$

故$K=1^2$，2^2，3^2，$\cdots 11^2$，代入（1）式。

得$x^2=1609$，1573，1513，1429，1221，1189，1033，853，649，421，169。

由于完全平方数的末位数必为0，1，4，5，6，9六个数字之一，故上面末位数为3的四个数显然不是完全平方数，弃去。

从（1）式可知x^2为奇数，而奇数平方被8除余数为1。(见例46)一个数能否被8整除只要看末三位数能否被8整除便可知道。于是从x^2的数列中再弃去不符合的，就只剩下三个数了。这三个数是

1609，649，169

其中只有169是一个完全平方数，所以

$$x^2=13^2,\quad y^2=11^2.$$

原方程的整数解有四组，为

(13，11)，(13，-11)，(-13，11)，(-13，-11)。

此例中运用末位数字来分析的方法，在解不定方程中也是常用的一个方法。

4° 当A是非完全平方的正整数时，

若$C=(-1)^nC_n$，则$x^2-Ay^2=C$有无穷多组整数解。

(C_n为$\sqrt{A}$化连分数时，从 $K_n=\frac{\sqrt{A}+b_n}{C_n}$所得)

若 $C\neq(-1)^nC_n$，且 $|C|<\sqrt{A}$那末方程无解。此时如果有 $|C|>\sqrt{A}$，则可转化成 $|C|<\sqrt{A}$的情况来解决。下面介绍一种化法。

方程 $x^2-Ay^2=C$（A 是非完全平方的正整数，$|C|>\sqrt{A}$） （1）

设整数 l 和 h 满足等式 $l^2=A+Ch$，且 $0\leqslant l\leqslant\frac{|C|}{2}$

由于 $0\leqslant l\leqslant\left[\frac{|C|}{2}\right]$，而 $0<\sqrt{A}<|C|$，即$0<A<C^2$

因此 $|h|=\left|\frac{l^2-A}{C}\right|<\left|\frac{C^2}{C}\right|=|C|$

我们得到新方程 $x^2-Ay^2=h$ （2）

如果方程(2)中，$|h|<\sqrt{A}$，且有整数解。

设$(x_0,\ y_0)$为方程(2)的任意一组整数解，那末

$$x+\sqrt{A}y=(x_0+\sqrt{A}y_0)\cdot(l\pm\sqrt{A})/h \quad (3)$$

一定是方程(1)的解。

从(3)得 $x=\frac{lx_0\pm Ay_0}{h}$，$y=\frac{ly_0\pm x_0}{h}$。

其中的“±”号，二式同取“+”号或同取“-”号。代人方程(1).

$$x^2-Ay^2=\frac{(lx_0\pm Ay_0)^2}{h^2}-\frac{A(ly_0\pm x_0)^2}{h^2}$$

$$=\frac{l^2(x_0^2-Ay_0^2)-A(x_0^2-Ay_0^2)}{h^2}$$

$$=\frac{(l^2-A)h}{h^2}$$

$$=C$$

满足方程(1)。

反之可证，若(x_1, y_1)为方程(1)的任意一组整数解，那末，

$$x+\sqrt{A}y=(x_1+Ay_1)\frac{h}{l\pm\sqrt{A}}$$

$$=\frac{(x_1+\sqrt{A}y_1)(l\pm\sqrt{A})h}{l^2-A}$$

一定是方程(2)的解。

这里 $x=\frac{h}{l^2-A}(lx_1\pm Ay_1)$，$y=\frac{h}{l^2-A}(ly_1\pm x_1)$

其中的"±"号，前后二式同取"+"号或"-"号。代人方程(2)

$$x^2-Ay^2=\frac{h^2}{(l^2-A)^2}[(lx_1\pm Ay_1)^2-A(ly_1\pm x_1)^2]$$

$$=\frac{h^2}{(l^2-A)^2}[l^2(x_1^2-Ay_1^2)-A(x_1^2-Ay_1^2)]$$

$$=\frac{h^2}{l^2-A}\cdot C$$

$$=h$$

满足方程(2)

总之，方程$x^2-Ay^2=C$的整数解，可通过将方程

$x^2 - Ay^2 = h$的整数解乘以$\frac{l \pm \sqrt{A}}{h}$而得到。这里整数l，

h满足$l^2 = A + ch$，$0 \leqslant l \leqslant \left[\frac{|C|}{2}\right]$，于是$|h| < \frac{|C|}{4}$。

若仍然$|h| > \sqrt{A}$，那末再"如法泡制"新方程，继续这个过程，直到$|h| < \sqrt{A}$。

例56 求整数解。

$$x^2 - 20y^2 = -11$$

解：因$|-11| > \sqrt{20}$，先求适合

$$l^2 = 20 - 11h$$

的整数l，h。

由于需$0 \leqslant l \leqslant \left[\frac{|C|}{2}\right]$即$0 \leqslant l \leqslant 5$

故$0 \leqslant 20 - 11h \leqslant 25$　即　$-\frac{5}{11} \leqslant h \leqslant \frac{20}{11}$

只能取$h = 0, 1$。试得$h = 1$，$l = 3$适合$l^2 = 20 - 11h$。

新方程为$x_1^2 - 20y_1^2 = 1$

因$\sqrt{20} = 4 + \left(\frac{1}{2+}\frac{1}{8}\right)$，　$s = 2$，　$\delta_2 = \frac{9}{2}$

新方程的整数解为

$$x_1 + \sqrt{20}y_1 = \pm(9 + 2\sqrt{20})^n \quad (n\text{是整数})$$

于是方程$x^2 - 20y^2 = -11$的整数解为

$$x + \sqrt{20}y = \pm(9 + 2\sqrt{20})^n(3 \pm \sqrt{20}) \quad (n\text{是整数})$$

例57 求整数解。

$$x^2-32y^2=-7$$

解：$|-7|>\sqrt{32}$，先求适合

$$l^2=32-7h$$

的整数l，h。

因 $0\leqslant l\leqslant 3$，得

$$0\leqslant 32-7h\leqslant 9 \quad 即 \quad \frac{9-32}{-7}\leqslant h\leqslant\frac{-32}{-7}$$

只能取$h=4$，得$l=2$。新方程为

$$x_1^2-32y_1^2=4$$

化连分数。

$$\sqrt{32}=5+\frac{1}{K_1} \qquad K_1=\frac{\sqrt{32}+5}{7}=1+\frac{1}{K_2}$$

$$K_2=\frac{\sqrt{32}+2}{4}=1+\frac{1}{K_3} \quad K_3=\frac{\sqrt{32}+2}{7}=1+\frac{1}{K_4}$$

$$K_4=\sqrt{32}+5=10+\frac{1}{K_5} \quad K_5=K_1$$

$s=4$，其中 $C_2=4$."番号"2为偶数，适合新方程。

取$\delta_2=\frac{6}{1}$，$\delta_4=\frac{17}{3}$。

得新方程$x_1^2-32y_1^2=4$的整数解为

$$x_1+\sqrt{32}y_1=\pm(17+3\sqrt{32})^n(6\pm\sqrt{32})$$

(n是整数)

所以原方程$x^2-32y^2=-7$的整数解是

$$x+\sqrt{32}\,y=\pm(17+3\sqrt{32})^n(6\pm\sqrt{32})\frac{2\pm\sqrt{32}}{4}$$ (n是整数)

这里三个"±"号各不相关。

从$(6+\sqrt{32})\dfrac{2+\sqrt{32}}{4}=11+2\sqrt{32}$

$-(6+\sqrt{32})\dfrac{2-\sqrt{32}}{4}=5+\sqrt{32}$

可推知：

$\pm(6\pm\sqrt{32})\dfrac{2\pm\sqrt{32}}{4}=\pm(11\pm2\sqrt{32})$或$\pm(5\pm\sqrt{32})$

因此原方程的整数解可以写成：

$x+\sqrt{32}\,y=\pm(17+3\sqrt{32})^n(11\pm2\sqrt{32})$或

$x+\sqrt{32}\,y=\pm(17+3\sqrt{32})^n(5\pm\sqrt{32})$

但前后二式互相包含。这是因为，

$$-(17+3\sqrt{32})(11-2\sqrt{32})=5+\sqrt{32}$$

$$-(17+3\sqrt{32})(5-\sqrt{32})=11+2\sqrt{32}$$

总之，我们只需在二式中取一式即可表达。今取

$$x+\sqrt{32}\,y=\pm(17+3\sqrt{32})^n(5\pm\sqrt{32})$$

(n是整数，前后"±"号各不相关)是为原方程的整数解。

又解：前面$\sqrt{32}$化连分数中有

$$C_1=7$$

"番号"为奇数，符合题给方程$x^2-32y^2=-7$，故此

题可直接求解。

取 $\delta_1=\frac{5}{1}$， $\delta_4=\frac{17}{3}$

得方程的整数解为

$x+\sqrt{32}y=\pm(17+3\sqrt{32})^n(5\pm\sqrt{32})$（$n$是整数）

例58 求$x^2-6y^2=57$的整数解。

解：因$57>\sqrt{6}$，先求适合

$$l_1^2=6+57h_1$$

的整数l_1，h_1

由于$0\leqslant l_1^2\leqslant\left[\frac{57}{2}\right]^2=784$

即知$\frac{-6}{57}\leqslant h_1\leqslant\frac{784-6}{57}$

取$h_1=0$，1，2…13 试之得

$h_1=10$，$l_1=24$，新方程为

$$x_1^2-6y_1^2=10 \tag{1}$$

此时仍然$10>\sqrt{6}$。再如上法，求适合

$$l_2^2=6+10h_2$$

的整数l_2，h_2

因为$0\leqslant l_2^2\leqslant\left[\frac{10}{2}\right]^2=25$

即知$\frac{-6}{10}\leqslant h\leqslant\frac{25-6}{10}$

取$h=0$，1，试之得

$h_2=1$，$l_2=4$，第二个新方程为

$$x_2^2-6y_2^2=1 \qquad (2)$$

按 $\sqrt{6}=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$，$s=2$。

取 $\delta_2=\frac{5}{2}$

得方程(2)的整数解为

$$x_2+\sqrt{6}\,y_2=\pm(5+2\sqrt{6})^n \ (n\text{是整数})$$

于是方程(1)的整数解为

$$x_1+\sqrt{6}\,y_1=\pm(5+2\sqrt{6})^n(4\pm\sqrt{6}) \ (n\text{是整数})$$

原方程的整数解为

$$x+\sqrt{6}\,y=\pm(5+2\sqrt{6})^n(4\pm\sqrt{6})(24\pm\sqrt{6})/10$$

从 $(4+\sqrt{6})(24+\sqrt{6})/10=(51+14\sqrt{6})/5$

$$(4+\sqrt{6})(24-\sqrt{6})/10=9+2\sqrt{6}$$

前者 (x, y) 非整数，舍去。推知原方程的整数解为：

$$x+\sqrt{6}\,y=\pm(5+2\sqrt{6})^n(9\pm2\sqrt{6}) \ (n\text{为整数})$$

练　习

(94)求不定方程$x^2+7y^2=792$的整数解。

(95)求不定方程$9x^2+5y^2=269$的整数解。

(96)求下列不定方程的整数解。

(1) $x^2-2y^2=1$

(2) $x^2-2y^2=-1$

(3) $x^2-2y^2=2$

(4) $x^2-2y^2=0$

(97) 求$x^2-39y^2=10$的整数解。

(98) 求$x^2-30y^2=6$的整数解。

(99) 求$x^2-2y^2=71$的整数解。

(100) 求$x^2-42y^2=-17$的整数解。

(101) 求$x^2-15y^2=61$的整数解。

十六、一般二元二次不定方程

在解析几何里，关于一般二次曲线方程

$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的讨论，也适用于一般二元二次不定方程。实际上不定方程的整数解就是图象（直线或二次曲线）上的整点，即坐标（x，y）是整数的那些点。

一般二元二次不定方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

（a，b，c，d，e，f为整数）

1°若有

$$\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}=0$$

即　$4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0$

那末原方程可以分解成二个一次不定方程来解。方程的图象是二条或相交，或平行，或重合的直线，其整数解是直线上的整点。

2°若

$$\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \neq 0$$

且 $\qquad b^2-4ac\neq 0$

那末原方程总可以化成

$$x^2-Ay^2=C\ (A,\ C\text{是整数},\ A\neq 0)$$

型的二次不定方程来解。方程的图象是椭圆或双曲线，其整数解是曲线上的整点。

3°若

$$\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \neq 0$$

且 $\qquad b^2-4ac=0$

那末原方程为抛物线型，可化成一个未知数为一次的不定方程来解。其整数解是抛物线上的整点。

为了简便，解一般二元二次不定方程(1)时，我们先将它看作是 x 的二次三项方程。

$$ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)=0$$

应用求根公式。

$$x=\frac{1}{2a}[-(by+d)$$
$$\pm\sqrt{(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)}\ ]$$

整理根号内的多项式，使成 y 的二次三项式。

$$(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+d^2-4af$$

若原方程有整数解，则根号内代数式的值必为完全平方数。令其等于 u^2（u 是正整数），则有

$$x=\frac{-(by+d)\pm u}{2a} \tag{2}$$

又从

$$(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+(d^2-4af-u^2)$$
$$=0$$

按求根公式解得

$$y=\frac{1}{b^2-4ac}[(2ae-bd)$$
$$\pm\sqrt{(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af-u^2)}]$$

整理根号内的式子使成

$$[(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)]$$
$$+(b^2-4ac)u^2$$

同理令其等于 v^2（v为正整数）

又令 $A=b^2-4ac$

$$C=(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)$$

则上式便为

$$v^2-Au^2=C \qquad (A,\ C\text{是整数}) \tag{3}$$

型方程了。并有

$$y=\frac{(2ae-bd)\pm v}{b^2-4ac} \tag{4}$$

然后只需求解方程(3)，并取代人(2)(3)式后使 x，y，为整数的解，即为原方程的整数解了。

在具体解一般二元二次不定方程时，要综合运用以前学过的方法。下面是一些例子。

例59　求 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3=0$ 的整数解。

解：$a=4$，$b=-4$，$c=-3$，$d=-4$，$e=10$，$f=-3$。

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & -6 & 10 \\ -4 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

原方程可以分解成二个一次不定方程。

因式分解得

$$(2x-3y+1)(2x+y-3)=0$$

分别解：$2x_1-3y_1+1=0$

$$2x_2+y_2-3=0$$

得 $\begin{cases} x_1=3t_1+1 \\ y_1=2t_1+1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_2=t_2 \\ y_2=3-2t_2 \end{cases}$ （t_1，t_2为整数）

即是原方程整数解的通式。

例60　求 $3x^2-8xy+7y^2-4x+2y=109$ 的整数解。

解：按 $3x^2+(-8y-4)x+(7y^2+2y-109)=0$

运用求根公式，得

$$x=\frac{(8y+4)\pm\sqrt{(8y+4)^2-12(7y^2+2y-109)}}{6}$$

整理根号内的代数式。成

$$4(-5y^2+10y+331)$$

设 $-5y^2+10y+331=u^2$（u为正整数），则

$$x=\frac{4y+2\pm u}{3} \quad (1)$$

又从 $-5y^2+10y+331-u^2=0$ 得

$$y=\frac{-10\pm\sqrt{100+20(331-u^2)}}{-10}$$

整理根号内的代数式，成

$$20(336-u^2)=4\times5(336-u^2)$$

要成为完全平方数，$(336-u^2)$必有因数5。

今设$336-u^2=5v^2$（v为正整数）

因此 $\quad y=1\pm v \quad (2)$

解 $\quad u^2+5v^2=336 \quad (3)$

即 $\quad u^2=336-5v^2$

由于$5v^2$的末位数是0或5，因而$(336-5v^2)$的末位数只能是6或1。也就是u^2的末位数是6或1，所以u的末位数是1或4或6或9。

以$u=1，4，6，9，11，14，16$。试之（注意$19^2=361>336$，故19以上均不合适）得二组正整数解满足方程(3)。

$$\begin{cases}u_1=4\\v_1=8\end{cases}\qquad\begin{cases}u_2=16\\v_2=4\end{cases}$$

代入(1)(2)二式，得原方程的四组整数解为

(14，9)，(-10，-7)，(2，5)，(2，-3)

例61　求$3xy+2y^2-4x-3y=12$的整数解。

解：因原方程关于x是一次，故先求解x。

$$x=\frac{-2y^2+3y+12}{3y-4}$$

将此式二边乘以3，并分离其整数部分。

$$3x=-2y+\frac{y+36}{3y-4}$$

二边再乘以3，并分离其整数部分。

$$9x=-6y+1+\frac{112}{3y-4} \qquad (1)$$

分解112的质因数。

$$112=2\times2\times2\times2\times7$$

于是$(3y-4)$或$\frac{112}{3y-4}$作为112的因数，可能是

±1，±2，±4，±7，±8，±14，±16，±28，±56，±112

但按(1)式

$$1+\frac{112}{3y-4}=3(3x+2y)\text{为3的倍数。}$$

所以$\frac{112}{3y-4}$可为

-1，2，-4，-7，8，14，-16，-28，56，-112

推得$3y-4=-112$，56，-28，-16，14，8，-7，-4，2，-1，

解出y，并代入(1)式，得到对应的x值。

总之原方程有下列10组整数解。

(24，-36)，(-13，20)，(5，-8)，(2，-4)，

(-3，6)，(-1，4)，(-1，-1)，(-3，0)，

(5，2)，(-13，1)

例62　求 $9x^2-12xy+4y^2+3x+2y-12=0$ 的整数解。

解：运用求根公式得

$$x=\frac{(12y-3)\pm\sqrt{(12y-3)^2-36(4y^2+2y-12)}}{18}$$

简化根号内的代数式，成

$$9(-16y+49)$$

令 $-16y+49=u^2$（u为正整数），则

$$x=\frac{4y-1\pm u}{6} \qquad (1)$$

$$y=\frac{49-u^2}{16}=3-\frac{u^2-1}{16} \qquad (2)$$

从(2)式可知，u^2-1需为16的倍数，因此u为奇数。

设$u=2K_1-1$（K_1为自然数），

代入$\frac{u^2-1}{16}$得$\frac{K_1^2-K_1}{4}=\frac{K_1(K_1-1)}{4}$

其中(K_1-1)和K_1是二个连续的非负整数，必有一个为偶数，且是4的倍数。

令$K_1-1=4K_2$（K_2是非负整数）

则$K_1=4K_2+1$，$u=8K_2+1$。

令$K_1=4K_2$，

则$u=8K_2-1$。

今分此二种情况讨论如下：

一、$u=8K_2+1$。代入（1）（2）二式得，

$$x=2-2K_2^2-\frac{2K_2(K_2-1)}{3} \tag{3}$$

或

$$x=1-2K_2^2-2K_2-\frac{2(K_2+1)(K_2-1)}{3} \tag{4}$$

$$y=3-4K_2^2-K_2 \tag{5}$$

1°设$K_2=3K_3$（K_3是非负整数）分别代入(3)式(5)式得

$$\left.\begin{aligned} x&=-24K_3^2+2K_3+2 \\ y&=-36K_3^2-3K_3+3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

又代入（4）式无整数解。

2°设$K_2=3K_3+1$，代入（3）（4）（5）式，得二组整数解

$$\begin{cases} x=-24K_3^2-14K_3 \\ y=-36K_3^2-27K_3-2 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x=-24K_3^2-22K_3-3 \\ y=-36K_3^2-27K_3-2 \end{cases} \tag{8}$$

3°设$K_2=3K_3+2$，代入(3)式，无整数解。又代入(4)(5)式得一组整数解。

$$\begin{cases} x = -24K_3^2 - 38K_3 - 13 \\ y = -36K_3^2 - 51K_3 - 15 \end{cases} \quad (9)$$

二、$u = 8K_2 - 1$。代入(1)(2)二式得，

$$x = 1 - 2K_2^2 + 2K_2 - \frac{2(K_2+1)(K_2-1)}{3} \quad (10)$$

或

$$x = 2 - 2K_2^2 - \frac{2K_2(K_2+1)}{3} \quad (11)$$

$$y = 3 - 4K_2^2 + K_2 \quad (12)$$

1°设 $K_2 = 3K_3$，代入(10)式，无整数解。又代入(11)(12)式得一组整数解。

$$\begin{cases} x = -24K_3^2 - 2K_3 + 2 \\ y = -36K_3^2 + 3K_3 + 3 \end{cases} \quad (13)$$

2°设$K_2 = 3K_3 + 1$，代入(10)(12)得一组整数解。

$$\begin{cases} x = -24K_3^2 - 10K_3 + 1 \\ y = -36K_3^2 - 21K_3 \end{cases} \quad (14)$$

又代入(11)式无整数解。

3°设$K_2 = 3K_3 + 2$，代(10)(11)(12)式，得二组整数解。

$$\begin{cases} x = -24K_3^2 - 26K_3 - 5 \\ y = -36K_3^2 - 45K_3 - 11 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} x = -24K_3^2 - 34K_3 - 10 \\ y = -36K_3^2 - 45K_3 - 11 \end{cases} \quad (16)$$

综上所得，共有八组整数解通式，见(6)(7)(8)(9)(13)(14)(15)(16)等式。

但若以$-K_3$代替(6)式中的K_3，即得(13)式。

若以$-(K_3+1)$代替(7)式中的K_3，即得(16)式。

若以$-(K_3+1)$代替(8)式中的K_3，即得(15)式。

若以$-(K_3+1)$代替(9)式中的K_3，即得(14)式。

于是我们将K_3扩大定义为整数，那末只要取上面八组解的前四组解或后四组解即是原方程的整数解通式了。

例63 $x^2-8xy-17y^2+72y-75=0$

求它的整数解，并算出它的二组正整数解。

解： $x=4y\pm\sqrt{16y^2+17y^2-72y+75}$

化简根号内的代数式，得

$$33y^2-72y+75=3(11y^2-24y+25)$$

令$11y^2-24y+25=3u^2$（u为正整数），则

$$x=4y\pm 3u \qquad (1)$$

$$y=\frac{12\pm\sqrt{12^2-11(25-3u^2)}}{11}$$

整理根号内的代数式，得

$$33u^2-131$$

令$33u^2-131=v^2$（v为正整数），则

$$y=\frac{12\pm v}{11} \qquad (2)$$

又 $$v^2-33u^2=-131 \qquad (3)$$

求整数l_1，h_1使满足

$$l_1^2=33-131h_1 \quad 0\leqslant l_1^2\leqslant\left[\frac{131}{2}\right]^2=4225$$

故 $$\frac{4225-33}{-131} \leqslant h_1 \leqslant \frac{-33}{-131}$$

h_1可取 -32至 0 各整数。

由于平方数l_1^2的末位数为 0，1，4，5，6，9。因此h_1的末位数需为 7，8，1，2，3，6。

今试得$h_1=-32$，$l_1=65$，新方程为

$$v_1^2-33u_1^2=-32 \tag{4}$$

再求整数l_2，h_2使适合

$$l_2^2=33-32h_2 \quad 0 \leqslant l_2^2 \leqslant 256$$

推得$h_2=-6$，$-5\cdots$，1，试之得

$h_2=1$，$l_2=1$，新方程为

$$v_2^2-33u_2^2=1 \tag{5}$$

因 $\sqrt{33}=5+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{10}\right)$，$s=4$，$\delta_4=\frac{23}{4}$。

所以方程（5）的整数解为

$$v_2+\sqrt{33}u_2=\pm(23+4\sqrt{33})^n \quad (n\text{是整数})$$

方程（4）的整数解为

$$v_1+\sqrt{33}u_1=\pm(23+4\sqrt{33})^n(1\pm\sqrt{33})$$

方程（3）的整数解为

$$v+\sqrt{33}u=\pm(23+4\sqrt{33})^n(1\pm\sqrt{33})(65\pm\sqrt{33})/32$$

从 $(1+\sqrt{33})(65+\sqrt{33})/32=(49+33\sqrt{33})/16$

或 $(1+\sqrt{33})(65-\sqrt{33})/32=1+2\sqrt{33}$

前者为非整数解，舍去。

方程（3）的整数解简化成

$$v+\sqrt{33}u=\pm(23+4\sqrt{33})^{n}(1\pm 2\sqrt{33}) \qquad (6)$$

再从(1)(2)式得

$$\pm u=\frac{x-4y}{3}, \quad \pm v=11y-12$$

将u，v，扩大定义为整数，代入（6）式。

$$(11y-12)+\frac{\sqrt{33}(x-4y)}{3}$$

$$=\pm(23+4\sqrt{33})^{n}(1\pm 2\sqrt{33})$$

即 $33y-36+\sqrt{33}(x-4y)$

$$=\pm 3(23+4\sqrt{33})^{n}(1\pm 2\sqrt{33})$$

原方程的整数解包含在此通式中。

当$n=0$，1时，得

$$33y-36+\sqrt{33}(x-4y)=\pm 3\pm 6\sqrt{33}$$

$$33y-36+\sqrt{33}(x-4y)=\pm 723\pm 126\sqrt{33}$$

即 $\begin{cases}11y-12=\pm 1\\ x-4y=\pm 6\end{cases}$　　$\begin{cases}11y-12=\pm 241\\ x-4y=\pm 126\end{cases}$

得正整数解二组，为（10，1），（218，23）。

例64　沿一条灌溉渠道的一边，排列着三块大小不同的正方形果园，共有果树3890株。里面的果树都依行依列地排成直线，行距与株距都一样。即每株果树所占正方形地的面积相等。如果沿灌溉渠道的一边从头走到底，可以数得靠渠道一边共有果树96株。这三块地，第一块面积最大，种的是

苹果树。第二块面积其次，种的是梨树。第三块种的是桃树，桃树数目虽少，但不少于百株。问三块地各有果树多少株？

解：设三块地各有果树 x^2株，y^2 株，z^2株。

按题意有方程：

$$\begin{cases} x+y+z=96 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=3890 & (2) \end{cases}$$

且$x>y>z>10$均为正整数。

从（1）式得$z=96-x-y$　　（3）

代入（2）式，消去z，并加以整理。

$$x^2+y^2+xy-96x-96y+2663=0$$

$$x=\frac{96-y\pm\sqrt{(y-96)^2-4(y^2-96y+2663)}}{2}$$

整理根号内的式子，成

$$-3y^2+192y-1436$$

令$-3y^2+192y-1436=u^2$（u为非负整数），则

$$x=\frac{96-y\pm u}{2} \qquad (4)$$

又 $y=\dfrac{192\pm\sqrt{192^2-12(u^2+1436)}}{6}$

根号内的式子为

$$19632-12u^2=12(1636-u^2)$$

为使其为完全平方数，令 $1636-u^2=3v^2$　（v是非负整数）。则

$$y=32\pm v \qquad (5)$$

解　　$u^2+3v^2=1636$

由于完全平方数的末位数是0，1，4，5，6，9。所以相应的$1636-u^2$的末位数可为6，5，2，1，0，7。同时$3v^2$的末位数可为0，3，2，5，8，7。

而$3v^2=1636-u^2$，比较$1636-u^2$和$3v^2$的末位数，相同的仅有0，2，7，5。此时对应的v的末位数为

0，2，3，5，7，8。

取$0\leqslant v\leqslant\left[\sqrt{\frac{1636}{3}}\right]=23$中，末位数与上列相符的。

试得(v, u)之三组正整数解为

(8，38)，(15，31)，(23，7)

代入(4)(5)(3)式，可得(x, y, z)的各整数解。

取$x>y>z>10$的，仅一组解(55，24，17)

即三种果树，苹果树有3025株，梨树有576株，桃树有289株。

练　　习

(102) 求$7x^2-65xy+72y^2=0$的整数解。

(103) 求$15x^2+31xy+14y^2-335x-249y+700=0$的正整数解。

(104) 求$3x^2-11xy-4y^2+x+9y=2$的整数解。

(105) 求$2y^2-4xy+3x^2=17$的整数解。

(106) 求$25x^2+9y^2+18y=360$的整数解。

(107) 求$x^2+xy+2y^2-23x-17y+132=0$的整数解。

(108) 求 $2x^2-3xy+5y=7$ 的整数解。

(109) 求$2x^2-5xy+3x-2y=10$的整数解。

(110) 求$4x^2-4xy+y^2+2x+4y-1=0$的整数解。

(111) 求$x+y+\frac{y}{x}=84$的整数解。

(112) 求$y^2-4xy-2x^2+2y-28x=33$的整数解。

(113) 求$x^2-xy-y^2+5y=0$的整数解。

(114) 求正整数解。

$$\begin{cases} x+y+z=23 \\ x^2+y^2+z^2=211 \end{cases}$$

(115) 设a与b为任意给定的整数，试证明方程

$$x^2+10ax+5b+3=0$$

和 $$x^2+10ax+5b-3=0$$

都没有整数根。（北京1978年数学竞赛题）

(116) 青年小张开始学习当售货员时，遇到一位顾客购买甲、乙二种单价不同的货物，顾客同时买一件甲种货物和若干件乙种货物。小张第一次算的时候，把二种单价搞错了，甲的搞成乙的，乙的搞成甲的，结果总价算成1元3角2分。但小张又算了第二遍，纠正了搞错的单价，算得总价应为1元7角2分。你能否推知甲、乙二种货物的单价和顾客买的件数？

十七、费马猜测

关于不定方程的整数解或正整数解，前面各节已提出的问题基本上都是二次以下的。其中二元一次不定方程如有多于一组的整数解，则整数解成等差级数。而二元二次不定方程常常是无整数解的，就是有整数解或有无穷组整数解，那末它的解比起一次不定方程来要“稀疏”得多。至于高出二次的二元不定方程，那就更多地是无整数解。若有整数解，往往是有限的，只有那些可以化成二次以下的不定方程是例外。

例如方程$x^2+2=y^3$有唯一整数解（5，3）。

方程$x^2+4=y^3$只有二组整数解（2，2），（11，5）。

方程$ax^3+y^3=1$（a是整数）除一组整数解（0，1）外最多还有一组整数解。

著名法国数学家费马（Fermat）曾断定，当$n\geqslant 3$时，

$$x^n+y^n=z^n \text{（}n\text{是正整数）}$$

没有正整数解。

费马在世时，曾肯定地说他已证明了上述命题的正确性，但是后来人们并没有找到费马的证明。于是许多数学家就想方设法去证明它，在证明的过程中，发展了整数论，取得了许多有意义的成果，在数学发展史上起了巨大的推动作

用。然而关于费马命题本身的证明却直到现在仍没能完成。仅当 $2<n<100000$ 及其倍数时，已证明定理成立。

高次不定方程不要说寻求它的整数解，就是判断方程有无整数解也是很不容易的。这里，我们来证明一个比较简单的例子，即为费马定理当 $n=4$ 时的情况。

例65　证明方程 $x^4+y^4=z^4$ 无正整数解。

证明：以 $u=z^2$ 代替 z^4，得方程

$$x^4+y^4=u^2 \qquad (1)$$

显然原方程有正整数解则方程（1）也有正整数解。也就是说，若方程（1）无正整数解则原方程也无正整数解。前后二句话互为逆否命题，因此要证 $x^4+y^4=z^4$ 没有正整数解只要证明 $x^4+y^4=u^2$ 没有正整数解就行了。

若方程(1)有正整数解，设 u_0 为它的最小解，对应的 x_0，y_0 必互质。如果 x_0，y_0 有大于 1 的公因数，那末 u_0 也必有这一因数。从方程中约去这个公因数，就会得到小于 u_0 的正整数解，与原设 u_0 为最小解不符。同理 u_0，x_0 或 u_0，y_0 也没有大于 1 的公因数，所以 x_0，y_0，u_0 二二互质。

按第九节"无零勾股"知方程(1)的正整数解 x_0^2，y_0^2 为一奇一偶，u_0 为三者中最大的奇数。

今设 y_0^2 为偶数。（若设 x_0^2 为偶数也一样可证）则有

$$\begin{cases} x_0^2=a^2-b^2 \\ y_0^2=2ab \\ u_0=a^2+b^2 \end{cases} \qquad \text{（}a,b\text{为一奇一偶的互质正整数且}a>b\text{）}$$

此时 a 不能为偶数。因 x_0 为奇数，x_0^2 被 4 除余 1（见前

例46）而 b 也为奇数，b^2被 4 除亦余 1 。若a为偶数，则 a^2-b^2被 4 除就会余 3 了，也就是 $x_0^2 \neq a^2-b^2$。所以 a,b 为一奇一偶在这里只能是a奇b偶。

设$b=2c$，则

$$y_0^2=4ac,$$

即 $$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2=ac \tag{2}$$

左边y_0为偶数，$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2$为完全平方数。

右边因a,b互质，a,c也互质。要使(2)式成立，必需a，c都是完全平方数。

设$a=m_1^2$，$c=n_1^2$（m_1，n_1是互质正整数）

代入$x_0^2=a^2-(2c)^2$ 得

$$x_0^2=m_1^4-4n_1^4$$

即 $$x_0^2+(2n_1^2)^2=(m_1^2)^2 \tag{3}$$

仍按勾股定理的通解，得(3)式的正整数解为

$$\begin{cases} x_0=d^2-e^2 \\ 2n_1^2=2de \\ m_1^2=d^2+e^2 \end{cases}$$
（d,e为一奇一偶的互质正整数且$d>e$）

如上同样地因$2n_1^2=2de$，$n_1^2=de$，知d，e各为完全平方数。

设$d=m_2^2$，$e=n_2^2$（m_2，n_2是互质正整数）

代入$m_1^2=d^2+e^2$，得

$$m_1^2=m_2^4+n_2^4$$

与方程(1)比较，我们得到了方程(1)的又一组正整数解

(m_2, n_2, m_1)。

并且$u_1 = m_1 < m_1^2 = a < a^2 < a^2 + b^2 = u_0$

这与原设 u_0 为最小解矛盾，可知 $x^4 + y^4 = u^2$ 无正整数解，从而原方程$x^4 + y^4 = z^4$无正整数解。

上面使用的证明方法是先归结到次数降低了的方程。若降次后的方程有正整数解，必有一个最小解，然后用反证法加以否定。这种证法在证明过程中可连续使用，叫做递降法。

费马定理的证明，经过许多数学家的努力，可以断定若用完全初等的方法是不可能成功的。

另外有许许多多的不定方程尚未解决，譬如

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

的整数解，虽然已找到了许多组：

$$1^3 + 6^3 + 8^3 - 9^3 = 0$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 - 6^3 = 0$$

$$1^3 - 9^3 - 10^3 + 12^3 = 0$$

$$2^3 - 9^3 - 15^3 + 16^3 = 0$$

…

但直到现在还没有找到它的整数解的通式，仅由欧拉(Euler)找到了它的有理数解的通式。

从数学史看，不定方程历史悠久，它的研究与整数论是密切关联着的。如果能够找到关于不定方程研究的新的有效方法，必将进一步推动它的发展。

练　　习

(117) 某人今年的岁数与他生日的日月数相乘，其乘积正好是1978。求此人今年的岁数，又他的生日是几月几日？

(118) 寻求适合不定方程

$$x^4 + y^2 = z^2$$

的正整数解。

(119) 证明$x^4 + 4y^4 = z^2$无正整数解。

(120) 证明不定方程

$$x^2 - 3y^n = -1 \quad (n\text{是正整数})$$

没有正整数解。

练 习 解 答

(1) 去分母得$x-9y=3$，于是整数解的通式为

$$\begin{cases} x=9K+3 \\ y=K \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

当取$K\geqslant 1$时，有无穷组正整数解。

(2) 小数部分$0.8y$应为整数，设$0.8y=K_1$则

$$y=K_1+\frac{K_1}{4} \quad (K_1\text{为整数})$$

最后得通式 $\begin{cases} x=102-49K_2 \\ y=5K_2 \end{cases} \quad (K_2\text{为整数})$

二组正整数解为 $\begin{cases} x=53 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases}$

(3) 此题24，15不是互质的，有公约数3，但20无此约数，所以原不定方程无整数解。

(4) 通式为 $\begin{cases} x=14K-5 \\ y=5K-1 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$

(5) $\frac{597}{1522}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$,

$$\frac{p_5}{q_5}=\frac{9}{23}$$

(6) 值为$\frac{225}{157}$。它的前一近数为$\frac{43}{30}$。

(7) $\pi \doteq \dfrac{314159}{100000}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{4}$

又 π的各近数为$\dfrac{p_1}{q_1}=3$；$\dfrac{p_2}{q_2}=\dfrac{22}{7}$；$\dfrac{p_3}{q_3}=\dfrac{333}{106}$，$\dfrac{p_4}{q_4}=\dfrac{355}{113}$。

(8) 前一近数为$\dfrac{8}{5}$。

(9) $\dfrac{5}{14}=0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1}$；项数$n=5$，前一近数$\dfrac{p}{q}=\dfrac{4}{11}$ 则有

$$a\cdot q-bp=5\times 11-14\times 4=(-1)^5=(-1)^n$$

(10) $\begin{cases} x=52K+9 \\ y=127K+22 \end{cases}$ （K为整数）

(11)显然当$x=5$时，$y=48$，得通式

$$\begin{cases} x=5K+5 \\ y=8K+48 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

取$K=0$，1，2，3，4，5，6，得100以内的七组正整数解为：

(5，48)，(10，56)，(15，64)，(20，72)，(25，80)，(30，88)

(35，96)

(12)设$2^x=u$，$3^y=v$ 则u，v为正整数。

解$23u+17v=2113$得通式

$$\begin{cases} u=8339-17K \\ v=23K-8452 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

再按$u>0$，$v>0$得

$$367\frac{11}{23}<K<372\frac{15}{17}$$

故$K=368$，369……372。

由于$u=2^x$为偶数，从通式可知K必为奇数。又$v=3^y$为3之倍数。因此K只能是371，得$u=32$，$v=81$。

所以原方程有唯一正整数解为（5，4）

(13)先将原方程各项约去公约数2，得$x+2y=136$。

然后解之，可知有67组正整数解。

(14)二位数为27。

(15)有三组解（1，7），（2，8），（3，9），所以这个二位数为17，28，39，三数之一。

(16)设三位数为x，则$8x-7y=6$（y为正整数）

解得$x=7K-12$（K为整数）

当$101\leqslant x\leqslant 109$时，取$K=17$，得$x=107$。

当$201\leqslant x\leqslant 209$时，同法得$x=205$

……

共可得11个解为107，205，303，401，408，506，604，702，709，807，905。

(17)$\frac{41}{35}=\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$

(18)设被4除余1的二位数为$4K+1$（K为正整数），则有

$$10\leqslant 4K+1<100$$

$$2\frac{1}{4}<K<24\frac{3}{4}$$

K可取3与24之间的22个正整数值，得22个成等差级数的二位数。于是

$$S_{22}=\frac{(13+97)\times 22}{2}=1210。（其中a_1=13，a_{22}=97）$$

(19)有二种可能，一种可能是甲种书买了4本，乙种书买了9本；另一种可能是买了甲种书9本，乙种书2本。

(20)大船3只，小船4只。

(21)设先生产甲种零件x天，后生产乙种零件y天。

$$1554x+1887y=25974$$

		1887
1554	1	1554
1332	4	333
222	1	222
222	2	111
0		

从右面辗转相除的竖式中我们发现有公约数111，可先约去，使之简化。然后解得不定方程的唯一组正整数解（7，8）。即生产甲种零件7天，生产乙种零件8天。

(22) $(10B+A)-(10A+B)=(100A+B)-(10B+A)$

解得：$A=1$，$B=6$，$\overline{AB}=16$，$\overline{BA}=61$，$\overline{A0B}=106$。速度为每小时45公里。

(23) $K=29$

(24) 从第(2)式解得：

$$\begin{cases} x=-3K_1-505 \\ y=5K_1+1010 \end{cases} \quad (K_1\text{为整数})$$

为使上面的通式简化，可以$K_1=-202+K_2$代之成

$$\begin{cases} x=101-3K_2 \\ y=5K_2 \end{cases} \quad (K_2\text{为整数})$$

代入第(1)式即可得解，通式为

$$\begin{cases} x=101-3K_2 \\ y=5K_2 \\ z=8K_2+6 \end{cases}$$

若得其他通式，均可通过代换化成此式。

由 $\begin{cases} 101-3K_2>0 \\ 5K_2>0 \\ 8K_2+6>0 \end{cases}$ 推知$0<K\leqslant 33$

所以共有33组正整数解。

(25)

$$\begin{cases} x=10K-8 \\ y=7-4K \\ z=3K-2 \end{cases} \quad (K\text{为整数})$$

其他形式的通式均可通过代换变成上式。

(26) 将原方程编为(1)，(2)，(3)式．由(1)式得

$$\begin{cases} x=-53-3K_1 \\ y=2K_1+53 \end{cases} \quad (K_1\text{是整数})$$

以$K_1=-20+K_2$ 代入使之简化。（K_2为整数）

$$\begin{cases} x=7-3K_2 \\ y=2K_2+13 \end{cases}$$

以(5)代入(2)：$8K_3+5z=52$ 解得

$$\begin{cases} K_2=-5K_3+104 \\ z=8K_3-156 \end{cases} \quad (K_3\text{为整数})$$

以$K_3=20+K_4$代换使之简化。（K_4为整数）

$$\begin{cases} K_2=-5K_4+4 & (6) \\ z=8K_4+4 & (7) \end{cases}$$

将(7)代入(3)得 $48K_4+7w=111$， 解之。

$$\begin{cases} K_4=-7K_5-111 \\ w=48K_5+777 \end{cases} \quad (K_5\text{为整数})$$

以$K_5=-15+K_6$代换使之简化。（K_6为整数）

$$\begin{cases} K_4=-7K_6-6 & (8) \\ w=48K_6+57 & (9) \end{cases}$$

以(8)代入(6)(7)再代入(4)(5)，即得通解。

$$\begin{cases} x=-105K_6-95 \\ y=70K_6+81 \\ z=-56K_6-44 \\ w=48K_6+57 \end{cases}$$

各表达数都大于零，解得$K_6=-1$获x,y,z,w的唯一正整数解为(10,11,12,9)

(27) 最小为23。

(28) 这个自然数最小为27。

(29) 得一等奖的1人，二等奖的3人，三等奖的10人。

(30) 设钱数为N，则

$$\begin{cases} N=77x-50 \\ N=78y \end{cases} \quad (x,y\text{为正整数})$$

消去N，得$77x-78y=50$，

解之 $\begin{cases} x=78K-50 \\ y=77K-50 \end{cases}$ （K为整数）

代入 $N=6006K-3900$

当$K=1$时，$N=2106$为适合本题的最少钱数。

(31) 仿“百鸡题”，可得二组解。其一为鹅蛋10个，鸭蛋2个，鸡蛋88个。另一解为鹅蛋5个，鸭蛋11个，鸡蛋84个。

(32) 设数为N。（a,b,c,d为正整数）

$$\begin{cases} N=2a+1 & (1) \\ N=5b+2 & (2) \\ N=7c+3 & (3) \\ N=9d+4 & (4) \end{cases}$$

从(1)(2)消去N，得$2a-5b=1$，解之

$\begin{cases} a=5K_1-2 \\ b=2K_1-1 \end{cases}$ （K_1为整数）

代入(3)式，整理得$10K_1-7c=6$，解得

$\begin{cases} K_1=7K_2-12 \\ c=10K_2-18 \end{cases}$ （K_2为整数）

代入(4)式，整理得$70K_2-9d=127$。解之。

$\begin{cases} K_2=9K_3+508 \\ d=70K_3+3937 \end{cases}$ （K_3为整数）

故$N=630K_3+35437$

取$K_3=-56$时，此数最小为157。

(33) 共有四组正整数解为(1，1，13)，(3，1，6)，(2,2,5)，(1,3,4)

(34) 正整数解有三组为(2,2,5) (2,5,3)，(2,8,1)

(35) 按前例(20)移项得$2x+z=100-21y$，

设$2x+z=u$，显然，$u\neq 0$，其正整数解的组数为

$$\frac{1}{4}\left[2u-3-(-1)^{u}\right]$$

由于 $0<y\leqslant\left[\frac{100-2-1}{21}\right]=4$

故y及u之值为：

y	1	2	3	4
u	79	58	37	16

将u值代入上式得：

$$\frac{1}{4}\{[155+1]+[113-1]+[71+1]+[29-1]\}$$

$$=92\text{（组）}$$

即原方程有92组正整数解。

(36) $\begin{cases} x=3t_3+t_2+1 \\ y=t_2 \\ z=5t_3+3t_2+5 \end{cases}$ （t_2, t_3为整值参数，t_1为解题时用的中间参数）

(37) $\begin{cases} x=11t_2-t_1+10 \\ y=t_1 \\ z=12t_2-t_1+10 \end{cases}$ （t_1，t_2为整数）

(38) $\begin{cases} x=t_3 \\ y=2t_2+1 \\ z=-2t_3+5t_2+2 \end{cases}$ （t_2, t_3为整数，t_1为解题时用的中间参数）

(39) 除第一项外各项均为偶数，故$7x$需为偶数。

$x=2$，$8y+10z+12w=48$ 化简成 $4y+5z+6w=24$

$x=4$，$8y+10z+12w=34$

由于y, z, w至少为1，此时$34-8-10-12=4<8$

可见无正整数解。

在$4y+5z+6w=24$中，同理可知$5z$为偶数。

$z=2$ 得唯一正整数解 $y=2$，$w=1$

故本题正整数解唯一为(2,2,2,1)

(40) $x_4 = x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 + \dfrac{2x_1 + x_2 - x_3 - 2}{3}$ (1)

设 $\dfrac{2x_1 + x_2 - x_3 - 2}{3} = t_1$ （t_1为整数）

得 $2x_1 + x_2 - x_3 - 2 - 3t_1 = 0$

设 $x_2 = t_2$，$x_3 = t_3$。 （t_2，t_3为整数）

得 $x_1 = t_1 + 1 + \dfrac{t_1 - t_2 + t_3}{2}$ (2)

再设 $\dfrac{t_1 - t_2 + t_3}{2} = t_4$ （t_4为整数）

解出 $t_1 = 2t_4 + t_2 - t_3$

代入(2)式得 $x_1 = 8t_4 + t_2 - t_3 + 1$

又以x_1, x_2, x_3的值，代入(2)式

得 $x_4 = 5t_4 + 8t_2 - 4t_3$

所以 $\begin{cases} x_1 = t_2 - t_3 + 3t_4 + 1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = 8t_2 - 4t_3 + 5t_4 \end{cases}$ （t_2, t_3, t_4是整值参数）

(41) 设锌块取x块，铜块取y块，镍块取z块。则有

$$24x + 16y + 11z = 184$$

方程中x项与y项的系数有公约数8，故今先定z之值。

$$0 < z \leqslant \left(\frac{184 - 24 - 16}{11}\right) = 13$$

取$z = 1, 2, 3, \cdots 13$

对应的$24x + 16y = 173, 162, 151, \cdots 41$

其中有约数8的仅为96，此时$z = 8$

于是得$3x + 2y = 12$ 解为(2,3)

所以，应取锌2块，铜3块，镍3块熔合，得到的合金中锌铜镍的重量比为

$$48:48:88=6:6:11.$$

(42) 设三种书各买的本数为x,y,z。则

$$3x+5y+4z=27$$

$$x=9-y-z-\frac{2y+z}{3} \qquad (1)$$

设 $\frac{2y+z}{3}=t_1$，(t_1为整数) $2y+z-3t_1=0$

设 $z=t_2$ (t_2为整数) 解出 $y=t_1+\frac{t_1-t_2}{2}$ (2)

设 $\frac{t_1-t_2}{2}=t_3$ (t_3为整数) 得$t_1=2t_3+t_2$

代入(2)(1)得

$$\begin{cases} x=9-5t_3-3t_2 \\ y=3t_3+t_2 \\ z=t_2 \end{cases}$$

正整数解需 $\begin{cases} 9-5t_3-3t_2>0 & (3) \\ 3t_3+t_2>0 & (4) \\ t_2>0 & (5) \end{cases}$

从(3)(4)解得 $-\frac{t_2}{3}<t_3<\frac{9-3t_2}{5}$ (6)

从(6)得 $-\frac{t_2}{3}<\frac{9-3t_2}{5}$ 即$t_2<\frac{27}{4}$

又按(5)故知$0<t_2\leqslant\left[\frac{27}{4}\right]=6$

于是$t_2=1$ 按(6)式 $-\frac{1}{3}<t_3<\frac{6}{5}$取 $t_3=0,1$ 有x,y,z的二组正

整数解为(6,1,1)(1,4,1)

又当$t_2=2$ 按(6)式 $-\frac{2}{3}<t_3<\frac{3}{5}$ 取$t_3=0$有一组解为(3,2,2)

当$t_2=3$ $-1<t_3<0$ 无整数合适，此时无正整数解。

当$t_2=4$ $-\frac{4}{3}<t_3<-\frac{3}{5}$ 取$t_3=-1$ 又得一组解为(2,1,4)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{当 } t_2=5 & -\frac{5}{3}<t_3<-\frac{6}{5} \\ \text{当 } t_2=6 & -2<t_3<-\frac{9}{5}\end{array}\right\}\text{均无整数适合}$$

共得本题的四组正整数解(6,1,1,)(1,4,1)(3,2,2)(2,1,4)

所以如上所示小王买书共有四种买法。

(48) 先分析将一根7.4m长塑料管截成甲、乙、丙三种长度有多少种截法列表：

截　法	甲种根数	乙种根数	丙种根数	剩　料
(1)	2	0	1	0.1
(2)	1	2	0	0.3
(3)	1	1	1	0.9
(4)	1	0	3	0
(5)	0	3	0	1.1
(6)	0	2	2	0.2
(7)	0	1	3	0.8
(8)	0	0	4	1.4

可见截法(3)(5)(7)(8)剩料太多，截法(1)(4)较省料，但无乙种塑料管，需考虑与截法(2)(6)搭配。

设用截法(1)(2)(4)(6)截取的塑料管数分别为x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_2 + 2x_4 = 100 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 100 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 60 - t \\ x_3 = 40 - t \\ x_4 = t - 10 \end{cases}$ （t为整数）

取非负整数解需$10 \leqslant t \leqslant 40$ 而$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 90$为常数，故$t$可以取[10,40]间的正整数，得31组解都只需要90根塑料管。但为了使截取的次数较少，我们应注意到截法(1)(2)(4)都只要截3次，而截法(6)要截4次，所以弃去截法(6)不用，此时需$t = 10$ 得$x_1 = 10, x_2 = 50, x_3 = 30, x_4 = 0$即为省料又省工时的方案。

将10根塑料管按截法(1)截取，得甲种塑料管20根，丙种塑料管10根，将50根塑料管按截法(2)截取，得甲种塑料管50根，乙种塑料管100根，又将30根塑料管按截法(4)截取，得甲种塑料管30根，丙种塑料管90根，共用塑料管90根，得甲、乙、丙塑料管100套。

(44)设甲供应A, B, C, D四个地方的粮食分别为x_1, x_2, x_3, x_4吨。乙供应A, B, C, D四个地方的粮食分别为y_1, y_2, y_3, y_4吨。

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 2500 \\ x_2 + y_2 = 2000 \\ x_3 + y_3 = 3000 \\ x_4 + y_4 = 3500 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7000 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4000 \end{cases}$$

设$x_1 = t_1$， $x_2 = t_2$， $x_3 = t_3$

解得
$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = 7000 - (t_1 + t_2 + t_3) \\ y_1 = 2500 - t_1 \\ y_2 = 2000 - t_2 \\ y_3 = 3000 - t_3 \\ y_4 = (t_1 + t_2 + t_3) - 3500 \end{cases}$$

由于$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$为非负整数，从上列诸解可得

$0 \leqslant t_1 \leqslant 2500$, $0 \leqslant t_2 \leqslant 2000$, $t_3 \leqslant 3000$,

$3500 \leqslant t_1 + t_2 + t_3 \leqslant 7000$

将上列诸解代入表示总吨公里数的式子，并予整理。

$80x_1 + 100x_2 + 70x_3 + 80x_4 + 90y_1 + 70y_2 + 80y_3 + 70y_4$

$= 920000 - 20(t_1 + t_3) + 20t_2$

要使此式值最小，需$t_1 + t_3$最大，t_2最小。故取$t_1 = 2500$，$t_2 = 0$，$t_3 = 3000$得解：

$x_1 = 2500$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3000$, $x_4 = 1500$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2000$, $y_3 = 0$, $y_4 = 2000$.

即最省运输力的方案为甲每年供应A 2500吨，C 3000吨，D 5000吨。乙每年供应B 2000吨，D 2000吨。

(45) 设大同供应天津、德县、石家庄的煤量分别为x_1, x_2, x_3吨，井陉供应天津、德县、石家庄的煤量分别为y_1, y_2, y_3吨。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 9 \\ x_1 + y_1 = 3 \\ x_2 + y_2 = 8 \\ x_3 + y_3 = 5 \end{cases}$$

可以解得：

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 7 - t_1 - t_2 \\ y_1 = 3 - t_1 \\ y_2 = 8 - t_2 \\ y_3 = t_1 + t_2 - 2 \end{cases} \quad (t_1, t_2\text{为参数})$$

又得 $0 \leqslant t_1 \leqslant 3 \qquad 0 \leqslant t_2 \leqslant 8$

$2 \leqslant t_1 + t_2 \leqslant 7$.

运费为$3x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 7y_1 + 4y_2 + 10y_3$

$= 3(t_1 + t_2) + 11t_2 + 54$

故取$t_1 + t_2 = 2$，$t_2 = 0$运费最低。此时的运输方案为

$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 5, y_1 = 1, y_2 = 8, y_3 = 0$.

即大同的煤调运2吨到天津，5 吨到石家庄。井陉的煤调运1 吨到天津，8吨到德县。

(46)将105进行质因数分解$105 = 3 \times 5 \times 7$。按勾股定理通解。

当x, y, z互质时有下列四组解：

m	n	x	y	z
1	105	105	5512	5513
3	35	105	608	617
5	21	105	208	233
7	15	105	88	137

当x, y, z有公约数$K > 1$时，有下列六组解：

K	m	n	$x' = Kx$	$y' = Ky$	$z' = Kz$
3	5	7	105	36	111
5	3	7	105	100	145
7	3	5	105	56	119
15	1	7	105	360	375
21	1	5	105	252	273
35	1	3	105	140	175

(47)利用勾股定理的推广式，$n=2$，得：

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$

(48)同上，$n=3$，得$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$。

(49) $y=\frac{1}{14}x+\frac{75}{14x}$

二边乘以14得$14y=x+\frac{75}{x}$

所以x为75的因数。见表：

x	1	3	5	15	25	75
$x+\frac{75}{x}$	76	28	20	20	28	76

$(x+\frac{75}{x})$需为14的倍数，显然$x=3$或25时适合题意，此时y有正整数值2与之对应，得正整数解二组为(3,2)(25,2)。

(50)去分母化简成$y(x-1)=2x+2$

得 $y=2+\frac{4}{x-1}$

故$x-1=1$或2或4，共有三组正整数解为(2,6)(3,4)(5,3)。

(51)原方程为$x(5x+5y+3z)=51$

因51为质数，故$x=1$，$5x+5y+3z=51$。推得

$$5y+3z=46$$

解此二元一次不定方程即得(x,y,z)的正整数解共三组为(1,8,2)(1,5,7)(1,2,12)。

(52)$x=12$，$y=11$。

(53)有一组正整数解为$(\frac{A+1}{2},\ \frac{A-1}{2})$

(54)从$(m-2)x=8$知$(m-2)$和x都是8的因数。

由于$m>0$，$m-2>-2$

故$m-2=\pm1,2,4,8$，于是$m=1,3,4,6,10$。

(55) 从 $\begin{cases}x-y=1\\x+y=63\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=3\\x+y=21\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=7\\x+y=9\end{cases}$

得三组正整数解(32,31)(12,9)(8,1)

(56)因$(n-m)(n+m)=1980$，$1980=2\times2\times5\times9\times11$

故$(n-m)$与$(n+m)$的可取值有(2,990)(10,198)(18,110)(22,90)。

这里1980为偶数，需$(n-m)$与$(n+m)$同为偶数。

最后解得(m,n)的正整数解为(494,496)(94,104)(46,64)(34,56)四组。

(57)170是偶数，x,y为同奇或同偶，若同偶则x^2+y^2有因数4，而$170=2\times85$只有因数2，没有因数4，故x，y不能同偶，仅能同奇。

设$x<y$，以$x\leqslant[\sqrt{85}]=9$ 的奇数试之，知$x=7$时合题，得二对自然数为(7,11)(11,7)。

(58)原方程左边因式分解成，$(x-y)(x-2y)=3$。

因$x-y>x-2y$ 得 $\begin{cases}x-y=3\\x-2y=1\end{cases}$

解之$x=5$，$y=2$。

(59)先变换并因式分解成$(x-y)(x+y-1)=-18$即：

$$(y-x)(x+y-1)=18$$

由$x\geqslant1$知$2x-1>1$

推得$y+x-1=(y-x)+2x-1>y-x$

故$y-x$的可取值为1,2,3,对应的$x+y-1$为18，9，6 可得三组方程。最后解得正整数解三组

(9,10) (4,6) (2,5)

(60)若有正整数解必 $\begin{cases}x-y=1\\x^2+xy+y^2=37\end{cases}$

解得(4,3)

(61)用代入法解得 $x\cdot y=7$ 从而得(x,y,z) 的四组整数解为

(7, 1, 6)(−7, −1, −6)(1,7, −6)(−1, −7,6)

(62)有6组解为(−4,3,1)(−4,1,3)(3, −4,1)(1, −4,3) (3,1, −4)(1,3, −4)

(63)由已知$\overline{xyz}\cdot\overline{zyx}=\overline{xzyyx}$是五位正整数。

所以　$x\cdot z\leqslant 9$是一位数，即$x\cdot z=x$。

因$x\neq 0$，$z\neq 0$，于是$z=1$

按题意有：$(100x+10y+1)(100+10y+x)$

$$=10000x+1000+100y-10y+x$$

化简成　$101xy+10x^2+90y+10y^2=90$

若$y\neq 0$，上式左边大于90，不成立。

必$y=0$　得$x=3$

故所求(x,y,z)为$(3,0,1)$

(64)设它们的最大公约数为K，一数为aK，另一数为bK(a，b是互质的正整数)，那末它们的最小公倍数$L=abK$。

按题意 $\begin{cases} aK+bK=667 \\ \dfrac{abK}{K}=120 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} K(a+b)=667 \\ a\cdot b=120 \end{cases}$

因为$667=23\times 29$

所以$K=1$时 $\begin{cases} a+b=667 \\ a\cdot b=120 \end{cases}$

$K=23$时 $\begin{cases} a+b=29 \\ a\cdot b=120 \end{cases}$

$K=29$时 $\begin{cases} a+b=23 \\ a\cdot b=120 \end{cases}$

当$K=667$时$a+b=1$显然不成立。

由于$a\cdot b=120$，$(a+b)$最大不会超过121，因此第一组方程也不成立。

从第二组方程解出二数为115和552，从第三组方程解出二数为232和435，即为本题之解。

(65) 设$x^2-60=K^2$（K为正整数）

即$(x-K)(x+K)=60$，$(x-K)$，$(x+K)$必同为偶数。

因$60=2\times2\times3\times5$，同偶的二个因数只能是2，30或6，10。

于是 $\begin{cases}x-K=2\\x+K=30\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-K=6\\x+K=10\end{cases}$

分别解得$x_1=16$，$x_2=8$即为所求。

(66) $\sqrt{37}=6+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\cdots=6+(\frac{1}{12})$

(67) 因$m^2+2<m^2+2m+1=(m+1)^2$故$[\sqrt{m^2+2}]=m$。

结果 $\sqrt{m^2+2}=m+\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}\right)$

(68) $\sqrt{14}=3+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}\right)$

(69) $\sqrt{54}=7+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right)$

(70) 因$51=7^2+2$ 故按练习第(67)题得

$$\sqrt{51}=7+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right)$$

$$\delta_1=7,\quad \delta_2=\frac{50}{7},\quad \delta_3=\frac{707}{99},\quad \delta_4=\frac{4999}{700}$$

又 $q_5=14\times700+99=9899$

由于δ_3与$\sqrt{51}$的误差小于$\frac{1}{q_3q_4}=\frac{1}{99\times700}<\frac{1}{50000}$，

所以$\sqrt{51}\approx\frac{707}{99}\approx7.1414$ 精确度已超过万分之一。

若取$\sqrt{51}\approx\delta_4$则误差小于 $\frac{1}{q_4q_5}=\frac{1}{700\times9899}<\frac{1}{5000000}$

于是$\sqrt{51}\approx\frac{4999}{700}\approx7.1414285$。考虑到$\delta_4>\sqrt{51}$，实际上误差仅为千万分之一。

(71) $\sqrt{3}=1+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)$取$(p_2,q_2)$ (p_4,q_4) (p_6,q_6) (p_8,q_8)四组正整数解为(2,1) (7,4) (26,15) (97,56)。

(72) $\sqrt{6}=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$取$(p_2,q_2)$ (p_4,q_4) (p_6,q_6)得三组正整数解为(5,2) (49,20) (485,198)。

(73) $\sqrt{7}=2+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}\right)$ $s=4$取(p_4,q_4) (p_8,q_8)得适合原方程的正整数对为(8,3) (127,48)。

(74) $\sqrt{79}=8+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{16}\right)$ $s=4$ 取(p_4,q_4)为(80,9)即合题。

(75) $\sqrt{29}=5+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)$ $s=5$为奇数，需取(p_{2s},q_{2s})即(p_{10},q_{10})，得满足方程的一组正整数解为：(9801, 1820)。

(76) $\sqrt{10}=3+\left(\frac{1}{6}\right)$，$s=1$ 取奇数“番号”的近数，即$(p_1,q_1)(p_3,q_3)(p_5,q_5)$得三组正整数解(3,1)(117,37),(4443,1305)。

(77) $\sqrt{73}=8+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{16}\right)$ $s=7$故取(p_7,q_7)得满足方程的正整数对(1068,125)。若要取第二组正整数对，s应为21，即取(p_{21},q_{21})。

(78) 若$x^2-8y^2=-1$有正整数解，则x必为奇数。

将方程变形为$x^2+1=8y^2$

由于奇数平方被8除余数是1，左边x^2+1被8除就余2了，右边$8y^2$能被8整除，故等式左右二边矛盾。

所以$x^2-8y^2=-1$无正整数解，同样无负整数解。

这类方程又无零解，总之$x^2-8y^2=-1$无整数解。

(79) 设大正方形内有x^2个小方格，小正方形内有y^2个小方格。

按题意$x^2-11y^2=1$

解之 $\sqrt{11}=3+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$, $s=2$,

取 (p_2,q_2) (p_4,q_4) …得 (10, 3) (199,60) ……

显然合题的是第一对，其余的正整数对数目太大与实际不符。所以小明所描的大正方形内有100个小方格，小正方形内有9个小方格。

(80) 设总人数为x^2-1，大方阵人数为x^2，小方阵人数为y^2。

则有$x^2-1=15y^2$，即$x^2-15y^2=1$

解之 $\sqrt{15}=3+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)$, $s=2$

取 (p_2,q_2) (p_4,q_4) (p_6,q_6) …

得 (4,1) (19,5)(91,24)…

对应的总人数为15,360,8280…

第一组答案仅15人数目太少，第三组以上的答案人数又太多，都不符合题目实际。所以第二组答案较为合适，总人数为360人。

(81) $x+\sqrt{17}y=(33+8\sqrt{17})^n$($n$是正整数)

(82) $x+\sqrt{63}y=\pm(8+\sqrt{63})^n$ (n是整数)

最初的几个解$n=0$，有二组含零解 (1,0) (-1,0)。

$n=\pm1$，有四组整数解(8,1) (-8,-1) (8,-1)(-8,1)。

$n=\pm2$，有四组整数解 (127,16) (-127,-16) (127,-16) (-127,16)。

(83) $x+\sqrt{55}y=\pm(89+12\sqrt{55})^n$ (n是整数)。

(84) ∵ $m^2<m^2+m<(m+1)^2$

∴ m^2+m不是完全平方数。

$$\sqrt{m^2+m}=m+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}\right), \quad s=2。$$

取 $\delta_2=\frac{2m+1}{2}$ 得最小解 $(2m+1,2)$。

整数解为 $x+\sqrt{m^2+m}\,y=\pm(2m+1+2\sqrt{m^2+m})^n$

（n是整数）。

(85) $\sqrt{67}$化连分数，$(-1)^4C_4=9$合题，$\delta^4=\frac{131}{16}$，得正整数解 (131,16)。

(86) $\sqrt{38}$化连分数

得$C_1=C_3=2$均合题

二正整数对为 (6,1) (450,73)。

(87) 最小解为 (14,3)。

(88) $\sqrt{13}=3+\frac{1}{K_1}$，$K_1=\frac{\sqrt{13}+3}{4}=1+\frac{1}{K_2}$，

$$K_2=\frac{\sqrt{13}+1}{3}=1+\frac{1}{K_3},\quad K_3=\frac{\sqrt{13}+2}{3}=1+\frac{1}{K_4},$$

$$K_4=\frac{\sqrt{13}+1}{4}=1+\frac{1}{K_5},\quad K_5=\sqrt{13}+3=6+\frac{1}{K_6},$$

$K_6=K_1$，$s=5$，这里$C_2=3$"番号"为偶数，不合。而$C_3=3$"番号"为奇数，合题。

故第一组正整数解 (x,y) 为 (7,2)。

又因s为奇数，所以$C_{2+s}=C_7$和$C_{3+2s}=C_{13}$均合题，因此第二、第三对正整数解 (p_n,q_n) 的"番号" n应取 7 和13。

(89) $x+\sqrt{57}\,y=\pm(151+20\sqrt{57})^n\cdot(8\pm\sqrt{57})$。（$n$是整数）

最初几组解为 (±8,±1) (±68,±9) (±2348,±311)。

(90) $x+\sqrt{34}\,y=\pm(35+6\sqrt{34})^n\cdot(5\pm\sqrt{34})$。（$n$是整数）

(91) $x+\sqrt{18}\,y=\pm(17+4\sqrt{18})^n\cdot(4\pm\sqrt{18})$。（$n$是整数）

(92) 设一只大包装箱能装货物x^2件，小包装箱能装货物y^2件。

则$x^2=3y^2-2$，即$x^2-3y^2=-2$。

解得 $x+\sqrt{3}y=\pm(2+\sqrt{3})^n\cdot(1\pm\sqrt{3})$，（$n$是整数）

其最初的几组正整数解为 (1,1) (5,3) (19,11) …

与此对应的装货数 (x^2,y^2) 为 (1,1) (25,9) (361,121 …

第一组答案显然不符合。第三组答案的尾数不利于按箱统计货物的件数，因此这种包装似不合实际情况。此后的答案太大不取。所以比较符合实际的是第二组答案，即大包装箱每只装货25件，小包装箱为9件。

(93) 设胶合成大正方形要用x^2块，胶合成一个小正方形要用y^2块。

则$x^2+3=12y^2$，即$x^2-12y^2=-3$.

解得$x+\sqrt{12}y=\pm(7+2\sqrt{12})^n\cdot(3\pm\sqrt{12})$。（$n$是整数）

它的最初几组正整数解为(3,1)(45,13)…

第一组显然不合，比较合题的显然是第二组解$x=45$，

塑料块的数目$x^2+3=2028$，数目再大胶合不易。

(94)以$y=1,2,3\cdots10$代入方程计算$792-7y^2$的值。其中为完全平方数者仅$y=3$，9时$x=27,15$，故整数解为(3,27)(3,−27)(−3,27)(−3,−27)(9,15)(9,−15)(−9,15)(−9,−15)。

(95)设$u=x^2, v=y^2$

解$9u+5v=269$得 $\begin{cases}u=5K-269\\v=9K+538\end{cases}$ （K为整数）

正整数解需$\dfrac{-538}{9}<K<\dfrac{-269}{5}$

取$K=-59,-58,\cdots-54$。

其中u，v为完全平方数的是$K=-57$此时$u=16$，$v=25$。

故原方程的整数解有四组为(4,5)(4,−5)(−4,5)(−4,−5)。

(96)方程(1)的整数解为$x+\sqrt{2}y=\pm(3+2\sqrt{2})^n$（$n$为整数）

方程(2)的整数解为$x+\sqrt{2}y=\pm(3+2\sqrt{2})^n\cdot(1\pm\sqrt{2})$。

(n为整数)

方程(3)因$2>\sqrt{2}$先求适合$l^2=2+2h$的整数l,h。

$$0\leqslant l^2\leqslant\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$$

试得$h=-1$，$l=0$，新方程为$x^2-2y^2=-1$

所以$x^2-2y^2=2$的整数解为：

$x+\sqrt{2}y=\pm(3+2\sqrt{2})^n\cdot(1\pm\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=\pm(3+2\sqrt{2})^n(2\pm\sqrt{2})$。($n$为整数)

方程(4)无整数解。从$x^2=2y^2$知x为偶数，x^2有因数4，于是$y^2=\frac{x^2}{2}$有因数2，因此y也是偶数。

设正整数对(x_1，y_1)满足方程，则x_1y_1必同为偶数，约去因数2得正整数对(x_2，y_2)必仍满足原方程，则仍同为偶数，再约去2得(x_3，y_3)仍满足原方程，必仍同为偶数，继续约下去到最后(x_n，y_n)至少有一个为奇数，但(x_n，y_n)仍为原方程的解，因$x^2=2y^2$二边约去几个2，等式仍然成立，按前面分析x_n，y_n同偶，于是矛盾。也就是原方程没有正整数解，也就没有整数解。

(97)求得适合$l^2=39+10h$的整数为$h=-3$，$l=3$新方程为$x^2-39y^2=-3$，整数解为：

$$x+\sqrt{39}y=\pm(25+4\sqrt{39})^n\cdot(6\pm\sqrt{39})$$

故原方程的整数解为：

$$x+\sqrt{39}y=\pm(25+4\sqrt{39})^n\cdot(6\pm\sqrt{39})\cdot(3\pm\sqrt{39})/3$$

(n是整数)

从$(6+\sqrt{39})\cdot(3+\sqrt{39})/3=19+3\sqrt{39}$和$-(6+\sqrt{39})\cdot(3-\sqrt{39})/3=7+\sqrt{39}$

推知$\pm(6\pm\sqrt{39})\cdot(3\pm\sqrt{39})/3=\pm(19\pm3\sqrt{39})$或$\pm(7\pm$

$\pm\sqrt{39})$。

所以原方程的整数解为：

$$x+\sqrt{39}y=\pm(25+4\sqrt{39})^n\cdot(19\pm3\sqrt{39})$$

或 $$\pm(25+4\sqrt{39})^n\cdot(7+\sqrt{39})$$

但 $$(25+4\sqrt{39})\cdot(19-3\sqrt{39})=7+\sqrt{39}$$

$$(25+4\sqrt{39})\cdot(7-\sqrt{39})=19+3\sqrt{39}$$

二式互相互含。

今取 $x+\sqrt{39}y=\pm(25+4\sqrt{39})^n\cdot(7\pm\sqrt{39})$。（$n$是整数）

(98)求得适合$l^2=30+6h$的整数$h=-5$，$l=0$， 新方程为$x^2-30y^2=-5$，整数解为：

$$x+\sqrt{30}y=\pm(11+2\sqrt{30})^n\cdot(5\pm\sqrt{30})\ (n是整数)$$

原方程的整数解为：

$$x+\sqrt{30}y=\pm(11+2\sqrt{30})^n\cdot(5\pm\sqrt{30})\cdot\sqrt{30}/5$$

$$=\pm(11+2\sqrt{30})^n(6\pm\sqrt{30})$$

但二式互相包含，$(4+\sqrt{15})\cdot(14-3\sqrt{15})=11+2\sqrt{15}$ 而$(4+\sqrt{15})\cdot(11-2\sqrt{15})=14+3\sqrt{15}$

故今取其一为 $x+\sqrt{15}y=\pm(4+\sqrt{15})^n\cdot(11\pm2\sqrt{15})$（$n$是整数）

(102)$7x^2-65xy+72y^2=(7x-9y)(x-8y)=0$

得通解 $\begin{cases}x=9t\\y=t\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=8t\\y=t\end{cases}$ （t为整数）

(103) 因式分解成$(3x+2y-7)(5x+7y-100)=0$

得正整数解(1,2)(13,5)(6,10)。

(104) 原方程可分解成$(x-4y+1)(3x+y-2)=0$

得整数解 $\begin{cases}x=4t-1\\y=t\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=t\\y=2-3t\end{cases}$ （t为整数）

(105) $y=\dfrac{4x\pm\sqrt{16x^2-24x^2+136}}{4}$

化简根号内的式子成$8\cdot(-x^2+17)$

令$-x^2+17=2u^2$则$y=x\pm u$

从$x^2+2u^2=17$试得$u=2$时有：

$\begin{cases}x=3\\y=1,5\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\y=-1,-5\end{cases}$

(106) $x=\dfrac{\pm\sqrt{-100(9y^2+18y-360)}}{50}=\pm\dfrac{3\sqrt{-y^2-2y+40}}{5}$

令$-y^2-2y+40=u^2$ 则$x=\pm\dfrac{3u}{5}$ （1）

从 $y^2+2y-40+u^2=0$得$y=-1\pm\sqrt{41-u^2}$

令$41-u^2=v^2$则$y=-1\pm v$ （2）

从(1)式知u为5的倍数，试得$u^2+v^2=41$的唯一解

$u=5$， $v=4$

得整数解(3,3)(3,−5)(−3,3)(−3,−5)。

(107) $x=\frac{(23-y)\pm\sqrt{-7y^2+22y+1}}{2}$

令 $-7y^2+22y+1=u^2$，则 $x=\frac{23-y\pm u}{2}$ (1)

从 $7y^2-22y-1+u^2=0$ 得 $y=\frac{11\pm\sqrt{128-7u^2}}{7}$，

令 $128-7u^2=v^2$， 则 $y\frac{11\pm v}{7}$ (2)

从 $v^2+7u^2=128$ 试得 (u,v) 的三组正整数解 (1,11)(2,10)(4,4)。

代入(1)(2)式共得整数解六组为：

(11,0)(12,0)(9,3)(11,3)(9,1)(13,1)。

(108) 有二组整数解为(6,5)，(2,1)

(109) $y=\frac{2x^2+3x-10}{5x+2}$

$$25y=10x+11-\frac{272}{5x+2} \qquad 272=2^4\times17$$

故 $(5x+2)$ 或 $\frac{272}{5x+2}$ 可为 ±1，±2，±4，±8，±16，±17，±34，±68，±136，±272。

而 $11-\frac{272}{5x+2}=5(5y-2x)$ 为 5 之倍数，

因此 $\frac{272}{5x+2}$ 仅可为 -4，$+16$，-34，$+136$。

于是得相应的四组整数解为 $(-14,-5)(3,1)(-2,1)(0,-5)$。

(110) $x=\frac{(4y-2)\pm\sqrt{20(-4y+1)}}{8}$

令 $-4y+1=5u^2$ 则 $x=\frac{2y-1\pm5u}{4}$ (1)

又 $y=\dfrac{1-5u^2}{4}$ (2)

显然u只能为奇数。设$u=2K-1$（K为自然数）

代入(2)得$y=-5K^2+5K-1$

再代入(1)得 $x=5K-2-\dfrac{5K^2}{2}$（这里K需为偶数）。

或 $x=\dfrac{-5K^2+1}{2}$（这里K需为奇数）得原方程整数解的通式是：

$$\begin{cases} x=5K-2-\dfrac{5K^2}{2} \\ y=-5K^2+5K-1 \end{cases} \quad （K是偶数）$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-5K^2+1}{2} \\ y=-5K^2+5K-1 \end{cases} \quad （K是奇数）$$

(111) 去分母解出 $x=\dfrac{84-y\pm\sqrt{y^2-172y+84^2}}{2}$

令$y^2-172y+84^2=u^2$ 则 $x=\dfrac{84-y\pm u}{2}$ (1)

并解出$y=86\pm\sqrt{340+u^2}$

令$340+u^2=v^2$ 则$y=86\pm v$ (2)

从$340=v^2-u^2=(v+u)(v-u)$

推知u，v同奇偶，且$v+u>v-u$

因$340=2\times2\times5\times7$ 于是 $\begin{cases} v+u=34 \\ v-u=10 \end{cases}$ 得$v=22, u=12$。

故方程有四组整数解为(4,64)(16,64)(−6,108)(−18,108)

(112) $y=2x-1\pm\sqrt{6x^2+24x+34}$

令$6x^2+24x+34=u^2$则$y=2x-1\pm u$ (1)

$$x=\frac{-24\pm\sqrt{24(-10+u^2)}}{12}$$

令$-10+u^2=6v^2$则$x=-2\pm v$ (2)

从$u^2-6v^2=10$ (3)

先求适合$l^2=6+10h$的整数 $h=1$，$l=4$

新方程为$u_1^2-6v_1^2=1$

整数解为$u_1+\sqrt{6}v_1=\pm(5+2\sqrt{6})^n$

故方程(3)的整数解为$u+\sqrt{6}v=\pm(5+2\sqrt{6})^n\cdot(4\pm\sqrt{6})$

从(1)得$\pm u=y-2x+1$，从(2)得$\pm v=x+2$

代入上式即为原方程整数解的通式：

$(y-2x+1)+\sqrt{6}(x+2)$

$=\pm(5+2\sqrt{6})^n\cdot(4\pm\sqrt{6})$

(113) $x=\frac{y\pm\sqrt{5(y^2-4y)}}{2}$

令$y^2-4y=5u^2$，则 $x=\frac{y\pm5u}{2}$ (1)

又$y=2\pm\sqrt{4+5u^2}$

令$4+5u^2=v^2$，则$y=2\pm v$ (2)

又$v^2-5u^2=4$ (3)

试得适合$l^2=5+4h$的$h=-1$，$l=1$。

新方程$v_1^2-5u_1^2=-1$的整数解为：

$$v_1+\sqrt{5}u_1=\pm(9+4\sqrt{5})^n\cdot(2\pm\sqrt{5})。$$

故方程(3)的整数解为$v+\sqrt{5}u=\pm(9+4\sqrt{5})^n\cdot(2\pm\sqrt{5})$
$\cdot(1\pm\sqrt{5})$简化并取$v+\sqrt{5}u=\pm(9+4\sqrt{5})^n\cdot(3\pm\sqrt{5})$，

从(1)(2)解得 $\pm u=-\frac{2x-y}{5}$， $\pm v=y-2$ 代入得：

$5(y-2)+\sqrt{5}(2x-y)=\pm5(9+4\sqrt{5})^n(3\pm\sqrt{5})$

(114) 消去z得$x^2+xy+y^2-23(x+y)+159=0$

$$x=\frac{(23-y)\pm\sqrt{-3y^2+46y-107}}{2}$$

令 $-3y^2+46y-107=u^2$ 　则 $x=\frac{23-y\pm u}{2}$ (1)

解出 $y=\frac{23\pm\sqrt{208-3u^2}}{3}$

令 $208-3u^2=v^2$ 　则 $y=\frac{23\pm v}{3}$ (2)

从 $v^2+3u^2=208$ 得正整数解 (v,u) 为 $(14,2)(10,6)(4,8)$。

代入(1)(2)得 x,y,z 的六组正整数解为：

$(9,3,11)(11,3,9)(3,11,9)(9,11,3)(3,9,11)(11,9,3)$

(115) 由求根公式得方程的根为 $x=-5a\pm\sqrt{25a^2-5b\pm3}$

根号内的式子为 $5(5a^2-b)\pm3$，是5的倍数±3。因此，它的末位数只可能是2，3，7，8，而完全平方数的末位数字需为0，1，4，5，6，9之一，故 $25a^2-5b\pm3$ 不是完全平方数，原方程无整数根。

(116) 设甲种货物的单价为 x 分，乙种货物的单价为 y 分，顾客买的乙种货物为 z 件，按题意有：

$$\begin{cases} xz+y=132 & (1)\\ x+zy=172 & (2)\end{cases}$$

从(1)得 $y=132-xz$ (3)

代入(2)解出 z：

$$z=\frac{66\pm\sqrt{x^2-172x+4356}}{x}=\frac{66\pm u}{x} \quad (4)$$

这里 $u^2=x^2-172x+4356$

$$x=86\pm\sqrt{3040+u^2}=86\pm v \quad (5)$$

这里 $v^2=3040+u^2$，即 $(v+u)(v-u)=3040$。

x 为货物单价必小于总价即 $0<x=86\pm v<132$，

得 　$v<86$

设 $v+u=a$，$v-u=b$，则 a,b 同奇偶且 $a>b$，

因$3040=2^5\times5\times19$，　a,b必同为偶数，

又$a+b=2v<86\times2=172$，而$19\times5\times2=190>172$，

故因数19和5不能同时包含在a或b中，只能分别存在于a或b中，也就是因数38和10分别包含在a或b中，剩下2^3因数分配在a，b中，且使 $a>b$，可得二种情况，$a_1=76$，$b_1=40$，$a_2=80$，$b_2=38$才能适合$a+b<172$，于是(u,v)有二组解$(18,58)(21,59)$。

第一组值代入(5)(4)(3)得正整数解(x,y,z)为$(28,48,3)$。第二组值代入无整数解。

总之甲种货物单价2角8分，乙种货物单价4角8分，那顾客买了1件甲种货物，3件乙种货物。

(117) 设此人今年x岁生于y月z日，按题意有：

$$xyz=1978$$

分解$1978=2\times23\times43$，由于月份数$y\leqslant12$，故只能是$y=2$，

又因日数$z\leqslant31$，只能$z=23$，因此$x=43$，

所以那人今年43岁，生日是2月23日。

(118) 按第九节“无零勾股”可知$4^2+3^2=5^2$得一组正整数解为$(2,3,5)$。

关于通式：

1°若x为奇数，y为偶数，按第九节“无零勾股”有

$$\begin{cases} x^2=mn \\ y=\dfrac{n^2-m^2}{2} \quad (m,n\text{是互质奇数，且}m>n) \\ z=\dfrac{n^2+m^2}{2} \end{cases}$$

则得m、n各自为完全平方数。

今设$m=a^2$，$n=b^2$，得正整数解为：

$$\begin{cases} x=ab \\ y=\dfrac{b^4-a^4}{2} \quad (a,b\text{是互质奇数，且}a<b) \\ z=\dfrac{b^4+a^4}{2} \end{cases}$$

2°若x为偶数，y为奇数。

仍按第九节"无零勾股"有：

$$\begin{cases} x^2=2ab \\ y^2=b^2-a^2 \\ z^2=b^2+a^2 \end{cases}$$ （a,b是互质的一奇一偶的正整数，且$a<b$）

则a,b二数中偶者必为$2c^2$形，奇者必为d^2形。于是

正整数解为 $$\begin{cases} x=2cd \\ y=|2c^2-d^2| \\ z=2c^2+d^2 \end{cases}$$ （c,d是互质的正整数，且d为奇数）。

(119) 若原方程有正整数解，设z_0为其最小解，即有正整数解

(x_0,y_0,z_0)，按$(x_0^2)^2+(2y_0^2)^2=z_0^2$（$x_0$为奇数），有：

$$\begin{cases} x_0^2=a^2-b^2 \\ 2y_0^2=2ab \\ z_0=a^2+b^2 \end{cases}$$ （a,b是互质的一奇一偶的正整数，且$a>b$）

同例(85)此处a奇b偶。

由$y^2=ab$，设$a=m_1^2$，$b=n_1^2$（这里m_1奇n_1偶且$m_1<n_1$），则$x_0^2=m_1^4-n_1^4$，即$x_0^2+(n_1^2)^2=(m_1^2)^2$，于是有：

$$\begin{cases} x_0=c^2-d^2 \\ n_1^2=2cd \\ m_1^2=c^2+d^2 \end{cases}$$ （这里c,d是互质的一奇一偶的正整数，且$c>d$）

若c为偶数，设$c=2e$，则$\left(\frac{n_1}{2}\right)^2 ed$，

设$e=m_2^2,d=n_2^2$，代入$m_1^2=c^2+d^2$得$m_1^2=4m_2^4+n_2^4$，即得到了原方程的又一组正整数解为(n_2,m_2,m_1)，且：

$$m_1<m_1^2=a<a^2<a^2+b^2=z_0$$

这与原设z_0为最小解矛盾。

若d为偶数，结果同样矛盾。

所以原方程$x^4+4y^4=z^2$无正整数解。

(120) 证明$x^2-3y^n=-1$没有整数解。

将原方程变形：$x^2+1=3y^n$，则$3y^n$为3的倍数，

设1° $x=3K$，此时x^2+1不是3的倍数，不合。

2° $x=3K+1$，$x^2=9K^2+6K+1$，x^2+1被3除余2，不是3的倍数，不合。

3° $x=3K+2$，$x^2=9K^2+12K+4$，n^2+1被3除余2，不合。

故原方程无整数解。